# Lycée Menabi El Ouloum – 7^e C/1

## Exercice 1

On cherche à modéliser l'évolution au cours du temps de deux populations d'animaux : le renard et le campagnol (un animal qui constitue l'essentiel du régime alimentaire du renard).

Pour tout entier naturel n, on note $a_n$ la population des renards, et $b_n$ la population des campagnols (donnée en milliers) à la fin du n-ième mois. On suppose que l'on a, pour tout n : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} = -0{,}025a_n + 1{,}05b_n \end{cases}$ ①

1. Donner une interprétation des coefficients 0,8 et 1,05 dans le contexte de l'exercice.
2. On suppose que la population initiale est de 90 renards et 30000 campagnols. Soit $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$.
   **a.** Calculer $a_1$, $b_1$ puis $a_2$, $b_2$.
   **b.** A l'aide d'un tableur, on a calculé les valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $n = 10, 20, 40, 50, 80$ et $100$ :

| n | 20 | 50 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 51,5503812 | 50,0118306 | 50,0000903 | 50,0000035 |
| $b_n$ | 25,1937977 | 25,0014788 | 25,0000113 | 25,0000004 |

   Que constate-t-on ? Interpréter ces résultats.
3. **a.** On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Écrire le système ① sous la forme d'une égalité matricielle $U_{n+1} = A \times U_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2.
   **b.** Démontrer que pour tout n, on a $U_n = A^n \times U_0$. A l'aide d'une calculatrice, on a trouvé :
   $$A^{20} = \begin{pmatrix} -0{,}2816 & 2{,}5633 \\ -0{,}1602 & 1{,}3204 \end{pmatrix},\quad A^{50} = \begin{pmatrix} -0{,}3329 & 2{,}6658 \\ -0{,}1666 & 1{,}3332 \end{pmatrix}, A^{100} = \begin{pmatrix} -0{,}3333 & 2{,}6666 \\ -0{,}1666 & 1{,}3333 \end{pmatrix}.$$
   Que constate-t-on ?
   **c.** Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer $P^{-1}$.
   **d.** Calculer $D = P^{-1}AP$, puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
   **e.** En déduire que, en prenant $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$, pour tout n : $\begin{cases} a_n = 50 + 40 \times 0{,}85^n \\ b_n = 25 + \ 5 \times 0{,}85^n \end{cases}$.
   Étudier le comportement de ces deux suites, et comparer avec les résultats obtenus à la question 2.b. Interpréter ce qui se passe à long terme.

## Exercice 2

1. On considère la fonction u définie sur $]1, +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{\ln x}$. Dresser le tableau de variation de u.
2. On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$. Dresser le tableau de variation de f.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \int_x^{x+n} f(t)dt$ où $x \in ]1, +\infty[$.
   **a.** Montrer que $\forall x \in ]1, +\infty[$, $nf(x+n) \leq F_n(x) \leq nf(x)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.
   **b.** Montrer que : $\forall x > 0,\ e^x > x + 1$ . En déduire que : $\forall t > 1,\ 0 < \ln t < t - 1$.
   **c.** Montrer que : $\forall x \in ]1, +\infty[,\ F_n(x) - n > \ln\left[\frac{n+x-1}{x-1}\right]$. En déduire $\lim_{x\to1^+} F_n(x)$.
   **d.** Dresser le tableau de variation de $F_n$. Tracer une allure de la courbe représentative de $F_1$.
4. Soit la quantité :
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f'\left(\frac{k}{n}\right),\quad \text{pour } n \geq 2.$$
   **a.** Montrer que pour tout $n \geq 2$ : $S_n - \frac{1}{n}f'\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(1) - f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n}f'(1)$.
   **b.** En déduire que pour tout $n \geq 2$ : $2\ln 2 + \frac{1}{n}\ln 2 - f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq 2\ln 2 + \frac{1}{n}\ln(1+n) - f\left(\frac{1}{n}\right)$.
   **c.** Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
5. **a.** Montrer que pour tout $n \geq 2$ :
   $$S_n = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right].$$
   **b.** Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4$.

**Prof. Sidi MAJOR**