Lycée Menabi El Ouloum – Révsion – 7^{e} C/11

Exercice 1

Partie A : Dans tout ce paragraphe, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a : $\int_0^x te^t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt$.
En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)e^t dt$, que : $e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt$.

2. On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer l'égalité : $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$.

3. Démontrer, par récurrence sur n, la formule : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

4. On pose $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$. Montrer que : $\lim_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$.

Partie B : On pose : $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$, $J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt$

1. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on pose $H = ae + b + ce^{-1}$.
Dans les deux premières questions, on suppose : $|a| + |c| \neq 0$.
 a. Montrer que : $n!\, H = n!\, [aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1} cJ_n$.
 b. Montrer que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $\frac{1}{e(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1} cJ_n$ quand n tend vers $+\infty$.
 c. Soit $Q_n = n!\, H - h(n)$. Montrer qu'il existe deux entiers rationnels k et k' tels que :
$$n!\, P_n(1) = 1 + kn \quad \text{et} \quad n!\, P_n(-1) = (-1)^n + k'n.$$
 En déduire que Q_n est, pour tout entier n, un entier, et que le nombre $Q_n - [a + (-1)^n c]$ est un multiple de n.

2. **a.** Prouver que, si H est nul, alors a, b et c sont nuls.
 b. En déduire qu'il n'existe aucune équation du second degré à coefficients rationnels dont une racine soit e.

Exercice 2(Bac-Mauritanie-1998)

A l'extérieur d'un triangle direct non rectangle OAB, on construit trois carrés : AONP, OBCU et BATI de centres respectifs J, H et L. On suppose que les angles $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OU})$ et $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$ ont pour mesure $+\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Le but de l'exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration décrite ci-dessus.

N.B. : Il est demandé de faire une figure pour chacune des parties.

Partie A : Propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances

1. On munit le plan d'un repère orthonormé direct dans lequel les points B et N ont pour affixes respectives b et n.
 a. Quelles sont les affixes a et u des points A et U ?
 b. Montrer que les droites (AU) et (BN) sont perpendiculaires et que $AU = BN$. Quelles conclusions similaires peut-on exhiber de la configuration ?
 c. Soit G le point tel que OUGN soit un parallélogramme. En déduire que le triangle GCP est rectangle isocèle.

2. Soit **t** la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ et **r** le quart de tour direct de centre O.
 a. Déterminer l'image de G par $\mathbf{r} \circ \mathbf{t}$.
 b. Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Démontrer que **r** transforme C' en C. Quelle est l'image de B par $\mathbf{r} \circ \mathbf{t}$?
 c. En déduire que les droites (AC) et (GB) sont perpendiculaires et que $AC = GB$.

Partie B : Propriétés d'alignement et de concours

1. Soit Q le point d'intersection des droites (BP) et (AC), et **t'** la translation de vecteur $\overrightarrow{TA}$.
 a. Quelles sont les images, par la translation **t'**, des hauteurs du triangle TOI ?
 b. En déduire que (OQ) est la hauteur issue du sommet O du triangle OAB.
 c. Montrer que les points G, O et Q sont alignés (on pourra utiliser le résultat de A-2.c.)

2. Soit K_1 le point d'intersection des droites (AU) et (BN). Soient **s** et **s'** les deux similitudes directes de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angles respectifs $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
 a. Déterminer **s**(B), **s**(N), **s'**(A) et **s'**(U).
 b. On définit les deux points K' et K'' par : K'= $\mathbf{s}(K_1)$ et K''= $\mathbf{s}'(K_1)$.
 Montrer que les triangles directs $K_1K'O$ et K_1OK'' sont isocèles rectangles en K_1 et que $K' \in (CP)$ et $K'' \in (CP)$.
 c. En déduire que les droites (AU), (BN) et (CP) sont concourantes.
 d. Montrer que les droites (OK_1) et (PC) sont les bissectrices de l'angle des droites (BN) et (AU).

3. **a.** Montrer que les points O, K_1, A, N d'une part, et K_1, A, L, B d'autre part, sont cocycliques. Quels sont les centres des cercles auxquels appartiennent respectivement ces points ?
 b. Calculer $2(\overrightarrow{K_1O}, \overrightarrow{K_1L})$. On pourra écrire : $(\overrightarrow{K_1O}, \overrightarrow{K_1L}) = (\overrightarrow{K_1O}, \overrightarrow{K_1A}) + (\overrightarrow{K_1A}, \overrightarrow{K_1L})$. Que peut-on en conclure ?

4. On admet que :
 a. Les droites (OT), (BP) et (IN) sont concourantes en un point noté K_3.
 b. Les droites (AC), (OI) et (UT) sont concourantes en un point noté K_2. Montrer que les droites (OK_1), (AK_2) et (BK_3) sont concourantes au point K, orthocentre du triangle HJL.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = |z|(2iz + 1)$.

1. **a.** Démontrer que f ne conserve pas l'alignement des points.
   b. En déduire que f n'est pas une similitude.
2. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et rayon r et $(\mathcal{C}')$ son image par f.
   a. Démontrer qu'il existe une similitude directe s telle que, pour tout point de $(\mathcal{C})$:$f(M) = s(M)$.
   b. En déduire la nature de s et ses éléments caractéristiques.
3. Donner un exemple de cercle dont l'image par f n'est pas un cercle.

Exercice 4

1. **a.** Vérifier que l'entier 101 est premier.
   b. Justifier que l'équation ①: $77x + 100y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
   c. Résoudre l'équation ① dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Soit (D) la droite passant par les points $A(13, -10)$ et $B(113, -87)$.
   a. Les coordonnées de A et B sont-elles solutions de ① ?
   b. Existe-t-il un point de (D) dont les coordonnées sont des entiers naturels ?
3. On considère, dans $\mathbb{N}$, l'équation ②: $x^{77} \equiv 3\ [101]$.
   a. Soit z une solution de ②.
   Prouver que z et 101 sont premiers entre eux et que $z^{100} \equiv 1\ [101]$.
   b. Montrer alors que : $z \equiv 3^{13}\ [101]$.
   c. Montrer que si $x \equiv 3^{13}\ [101]$ alors x est solution de ②.
   d. Montrer que l'ensemble des solutions de ② est l'ensemble des entiers naturels de la forme $x = 38 + 101k$ où k est un entier naturel.
   e. Soit z une solution de ②. Prouver que $51 + x^{2017}$ est un multiple de 101.

Prof. Sidi MAJOR