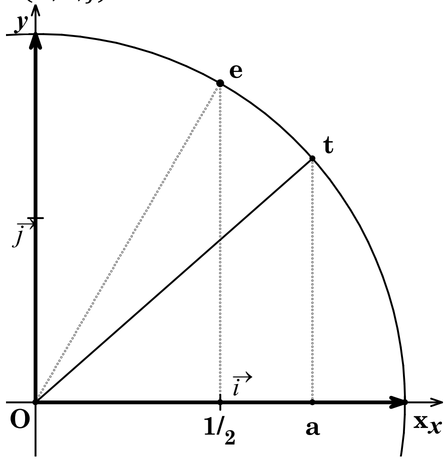
Lycée Menabi El Ouloum – 7e C/10

Exercice 1

On considère le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$ dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. En interprétant l'intégrale comme une aire et en découpant le domaine de manière adéquate, établir que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$



2. Pour a de $[0, 1]$, on pose :$J(a) = \int_0^a \sqrt{1 - x^2}dx$

et on désigne par t le réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos t = a$.

Établir que :$J(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}a\sqrt{1 - a^2}$.

Que retrouve-t-on pour $a = 1$?

3. Pour tout a de $[0, 1]$, la relation précédente donne :$t = a\sqrt{1 - a^2} - 2J(a) + \frac{\pi}{2}$.

et définit donc sur $[0, 1]$ la fonction f qui au réel a associe :$t = f(a) = a\sqrt{1 - a^2} - 2J(a) + \frac{\pi}{2}$.

a. Démontrer que f est dérivable sur $[0, 1[$ et que l'on a, pour tout x de $[0, 1[$:$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b. Expliquer pourquoi on peut prolonger la fonction f sur $[-1, 0]$ en posant : $f(a) = \pi - f(-a)$ si $a \in [-1, 0]$.
En déduire que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer f'.

c. Application : calculer$K = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est le calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}dt$ par les intégrales de Wallis.

Partie A : Intégralesde Wallis. : Pour tout entier naturel n, on note I_n l'intégrale suivante, dite intégrale de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir, pour tout entier naturel n, la relation : $(n + 2)I_{n+2} = (n + 1)I_n$.
3. Montrer que la suite de terme général $u_n = (n + 1)I_{n+1}I_n$ est constante.
4. En déduire, pour tout entier naturel n, la relation $(n + 1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que la suite de terme général $I_n$est strictement positive et décroissante.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, puis calculer la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.
7. Démontrer que la suite $\left(\sqrt{n} \times I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie B : Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle]–1 ; +∞[par $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

1. Étudier les variations de la fonction *f* et montrer que pour tout réel *x*de]–1 ; +∞[: $\ln(1 + x) \leq x$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel u et pour tout entier naturel n non nul : $-n \leq u \implies \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right],\ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$. On cherche à déduire de B-3) un encadrement de J_nà l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
   - **a.** À l'aide du changement de variable : $t = \sqrt{n}\sin u$, établir une minoration de J_n.
   - **b.** À l'aide du changement de variable : $t = \sqrt{n}\tan u$, établir une majoration de J_n.
5. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Prof. Sidi MAJOR