Lycée Menabi El Ouloum – 7e C/9

Exercice 1

Pour k entier naturel non nul et différent de 1, on considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n^{k-1}} \sqrt[n]{\frac{(kn)!}{n!}}.$$

1. Soit (v_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{p=n+1}^{p=kn} \ln \frac{p}{n}.$$

2. Montrer que v_n s'écrit aussi :

$$v_n = \frac{k-1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} \ln\left(1 + \frac{(k-1)i}{m}\right) \quad \text{où } m = (k-1)n.$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 \ln(1+(k-1)x)\,dx$.

4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

5. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{k^k}{e^{k-1}}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;2[$ par :$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

1. Soit F_0 la fonction définie sur $[0;2[$ par : $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$. Démontrer que F_0 possède un prolongement par continuité au point 2.

2. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction F_n définie sur $[0;2[$ par :$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}dt$.

a. A l'aide d'une I.P.P, démontrer que :$F_{n+1}(x) = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}dt$.
En déduire que : $(2n+3)F_{n+1}(x) = 8(n+1)F_n(x) - x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$.

b. En raisonnant par récurrence, démontrer que, pour tout n, $F_n(x)$ a une limite finie u_n lorsque x tend vers 2.

c. Montrer que :

$$u_n = 2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 3

On pose $P_n(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^n}+1)$.

1. Simplifier $(x-1)P_n(x)$.

2. En déduire la forme développée de $P_n(x)$.

3. En déduire que si $F_n = 2^{2^n}+1$ alors $F_n = F_0F_1\ldots F_{n-1} + 2$ où F_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat.

4. En déduire que si, contrairement à ce qu'espérait Fermat, les nombres de Fermat ne sont pas tous premiers, ils sont au moins premiers entre eux deux à deux.

5. En déduire une démonstration du fait qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.

Prof. Sidi MAJOR