Lycée Menabi El Ouloum – 7[e] C/8

Exercice 1

On propose de résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 - 6z + 4 = 0$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u + v = z$ et $uv = 2$.
  a. Calculer $(u + v)^3$ de deux manières différentes.
  b. En déduire les valeurs de $u^3 + v^3$ et u^3v^3.
  c. Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
  d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.

2. On pose $\omega = -2 + 2i$.
  a. Écrire ω sous la forme exponentielle.
  b. Résoudre l'équation $Z^3 = \omega$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
  c. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $Z^3 = \omega$ est :
$$\{1 + i, (1 + i)j, (1 + i)j^2\}.$$

3. En utilisant ce qui précède, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.

4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ sur : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie B

Soit F la fonction définie par : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$.

1. a. Montrer que : $\forall x > 0,\ \ \ln(2)\, e^{-1/x} \leq F(x) \leq \ln(2)\, e^{-1/2x}$.
  b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
  c. Montrer que F est continue à droite en 0.
  d. Étudier la dérivabilité de F à droite en 0.

2. a. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
$$F'(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2x}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2x}}\right).$$
  b. Dresser le tableau de variation de F.

3. a. Montrer que l'équation $F(x) = \frac{n}{n+1}\ln(2)$ admet une unique solution $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout naturel non nul n.
  b. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq e^{-\frac{1}{a_n}} \leq \frac{n}{n+1}.$$
  En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

4. a. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$
  Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\ln(n + 1) \leq S_n \leq 2\ln(n + 1)$.
  b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty}(S_n/n^k)$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Sidi MAJOR