2ème bac blanc (décembre 2022)

Épreuve de mathématiques - Durée : 4 heures

Inspirez-vous dans votre travail de cette citation de Rivaroll :

« Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire »

Exercice 1

1. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) à paramètre $\alpha \in [\,0, 2\pi\,[$:

$$z^2 - i(2\sin\alpha + 1)e^{-i\alpha}z - 2(\sin\alpha)e^{-2i\alpha} = 0.$$

   a. Montrer que le discriminant vaut : $\Delta = [i(2\sin\alpha - 1)e^{-i\alpha}]^2$. **(2 pts)**
   b. En déduire les solutions de l'équation (E), on désigne par z' la solution dont le module est égal à 1 et par z'' l'autre solution. **(2 pts)**
   c. Mettre z' et z'' sous forme exponentielle. **(2 pts)**
2. Dans le plan complexe $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on donne les points $M'(z')$ et $M''(z'')$.
   a. Quel est l'ensemble C' des points M' lorsque α varie dans $]\pi; 2\pi[$. **(1 pt)**
   b. Quel est l'ensemble C'' des points M'' lorsque α varie dans $]0; \pi/2[$. **(1 pt)**
3. On pose $Z = (2\sin^2\alpha + \sin\alpha) + i(\sin 2\alpha + \cos\alpha)$.
   a. Mettre Z sous forme exponentielle en utilisant ce qui précède. **(1 pt)**
   b. En déduire l'affixe du milieu de $[\,M'M'']$ en fonction de α. **(1 pt)**
4. **a.** Calculer z''/z'. Que peut on dire des points M', M'' et O ? **(2 pts)**
   b. Pour quelles valeurs de α, le point O est le milieu de $[M'M'']$? **(1 pt)**

22%

Exercice 2

On considère le système linéaire suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} -2x - 2y + z = -7 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 10y - 6z = 26 \end{cases}$$

1. Écrire le système (S_1) sous forme matricielle $A \times X = B$. **(2 pts)**
2. Soit M la matrice telle que $A = M - I_3$.
   a. Calculer M^2. En déduire A^2. **(2 pts)**
   b. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}. **(4 pts)**
   c. Résoudre alors le système (S_1). **(2 pts)**
3. Résoudre, sans nouveaux calculs, les systèmes suivants : **(2 pts)**

$$(S_2) : \begin{cases} x - 2y - 2z = -7 \\ -3x + 5y + 3z = 14 \\ -6x + 10y + 5z = 26 \end{cases} ; \quad (S_3) : \begin{cases} -2x + y - 2z = -7 \\ 5x - 3y + 3z = 14 \\ 10x - 6y + 5z = 26 \end{cases}$$

20%

Exercice 3

Partie A

1. Déterminer le signe de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 1 - x + \ln x$. **(1 pt)**
2. On admet que $\forall x \geq -\frac{1}{2}$, on a : $\left|\ln(x+1) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right| \leq 2x^4$. En déduire que : **(2 pts)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Partie B

On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f et on note C sa courbe dans un repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1} \quad si\ x \neq 0\ et\ x \neq 1 \\ f(0) = 0\ \ et\ \ f(1) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$. **(1 pt)**
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat obtenu. **(2 pts)**
3. **a.** Montrer que f est dérivable en 1, puis déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1. **(2 pts)**
   b. Déterminer la position de C par rapport à T. **(1 pt)**

4. Dresser le tableau de variation de f et construire $\mathcal{C}$ et T. **(2 pts)**

Partie C

1. Montrer que : **(1 pt)**

$$\forall x > 1, \qquad 1 < \frac{x \ln x}{x-1} < 1 + \ln x$$

2. En déduire que : **(1 pt)**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ 1 < (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1 + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

3. On définit la suite (U_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

   a. Montrer que : **(1 pt)**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ 1 < U_n < 1 + \frac{\ln(n+1)}{n}$$

   b. En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel que l'on déterminera. **(1 pt)**

25%

Exercice 4

Soient n un naturel tel que $n \geq 1$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^x - nx$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Dresser le tableau de variations complet de g_n. **(1 pt)**
2. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n dans $[0;\ +\infty[$. Que vaut α_1 ? **(2 pts)**
3. Montrer que $\alpha_n = \ln[n/(1+\alpha_n)]$ et que $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$. **(2 pts)**
4. a. Établir que pour tout réel $x > 0$, on a : $\ln(x) \leq x - 1$. **(1 pt)**

   b. Déterminer $g\big(\ln(\sqrt{n})\big)$. **(1 pt)**

   c. En déduire que $\frac{1}{2}\ln(n) \leq \alpha_n$. Quelles sont les limites de α_n et α_n/n ? **(3 pts)**

Partie B :

1. Dresser le tableau de variations complet de f_n. Montrer que $f_n(\alpha_n) = -n\alpha_n^2/(1+\alpha_n)$. **(3 pts)**
2. Montrer que $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote D_n que l'on demande de préciser. **(1 pt)**
   Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et D_n. **(1 pt)**
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_n$ et de l'axe des abscisses et préciser la position de $\mathcal{C}_n$ par rapport à cet axe. **(2 pts)**
4. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$. **(1 pt)**
5. On admet que $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,4$ et $-0,21 \leq f_2(\alpha_2) \leq -0,19$. Tracer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans le même repère en y choisissant une unité convenable. **(2 pts)**

33%

Sachez bien que :

« Le seul endroit où la réussite vient avant le travail c'est dans le dictionnaire. »