

Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

1^{er} tour

Niveau 4AS

28 février 2021

Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1: (25 points)

Soit a un entier naturel non nul

- 1) Montrer que $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$
- 2) Montrer que $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$
- 3) Déterminer quatre entiers naturels distincts x, y, z et t tels que : $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}$
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\frac{1}{2021x+2021} + \frac{1}{2021x^2+2021x} = \frac{1}{10105}$.

Exercice 2: (25 points)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a^2 \neq b^2$; On pose $m = \frac{ab}{a+b}$ et $n = \frac{-ab}{a-b}$

- 1) Montrer que $(a-m)(b-m) = m^2$
- 2) Montrer que $(a-n)(b+n) = -n^2$
- 3) Déterminer deux réels différents x et y tels que : $\left(x - \frac{15}{8}\right)\left(y - \frac{15}{8}\right)\left(x - \frac{15}{2}\right)\left(y + \frac{15}{2}\right) = -\left(\frac{15}{4}\right)^4$

Exercice 3: (25 points)

Soit $a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}$; $b = \frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ et $F = \frac{a^2+b^2}{a+b}$

- 1) Comparer les nombres a et b .
- 2) Ecrire F sous la forme $x + y\sqrt{z}$ où x, y sont des nombres rationnels et z l'entier naturel le plus petit possible.

Exercice 4: (25 points)

Sur la figure ci-contre :

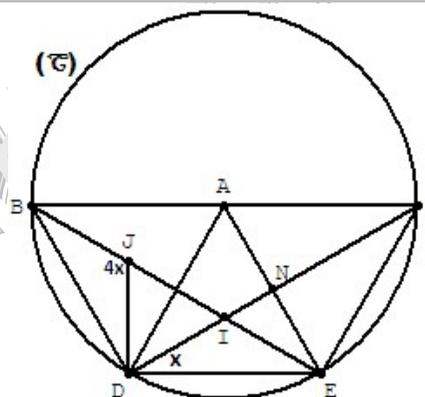
(\mathcal{C}) est un cercle de centre A

Les points B, A et F sont alignés

Le point J est le milieu de $[BI]$.

$(AD) \parallel (EF)$; $\widehat{BJD} = 4x$ et $\widehat{EDF} = x$.

- 1) Montrer que le triangle IDE est isocèle en I
- 2) Exprimer en fonction de x les mesures des angles \widehat{BFD} , \widehat{ADF} , \widehat{EBF} et \widehat{DFE} .
- 3) En déduire la valeur de x .



Fin.

Corrigé
proposé par AMIMATHS

Exercice 1: (25 points)

Soit a un entier naturel non nul

1) Montrer que $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$

2) Montrer que $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$

3) Déterminer quatre entiers naturels distincts x, y, z et t tels que : $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}$

4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\frac{1}{2021x+2021} + \frac{1}{2021x^2+2021x} = \frac{1}{10105}$.

Corrigé de l'Exercice 1

1) Pour tout entier naturel non nul a :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times \frac{a+1}{a+1} = \frac{a}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$$

2) Comme pour tout entier naturel non nul a , on a :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$$

alors :

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

$$\text{et } \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)+1} + \frac{1}{(a(a+1))(a(a+1)+1)} = \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$$

Donc $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$

3) En appliquant la dernière égalité pour $a=3$, on obtient :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3+2} + \frac{1}{(3+1)(3+2)} + \frac{1}{3^2+3+1} + \frac{1}{(3^2+3)(3^2+3+1)}$$

Donc $\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$

4) Résolution dans \mathbb{R} de l'équation $\frac{1}{2021x+2021} + \frac{1}{2021x^2+2021x} = \frac{1}{10105}$

En multipliant l'égalité précédente par 2021 on obtient $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{5}$

Or, d'après la question 1 : $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x}$ il en résulte donc que $x=5$

Barème :

1)	6 pts
2)	6 pts
3)	6 pts
4)	5 pts

Présentation et idées 2pts

Exercice 2: (25 points)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a^2 \neq b^2$; On pose $m = \frac{ab}{a+b}$ et $n = \frac{-ab}{a-b}$

1) Montrer que $(a-m)(b-m) = m^2$

2) Montrer que $(a-n)(b+n) = -n^2$

3) Déterminer deux réels différents x et y tels que : $\left(x - \frac{15}{8}\right)\left(y - \frac{15}{8}\right)\left(x - \frac{15}{2}\right)\left(y + \frac{15}{2}\right) = -\left(\frac{15}{4}\right)^4$

Corrigé de l'Exercice 2

1) Egalité 1 :

$$\begin{aligned}(a-m)(b-m) &= \left(a - \frac{ab}{a+b}\right)\left(b - \frac{ab}{a+b}\right) \\ &= \left(\frac{a^2 + ab - ab}{a+b}\right)\left(\frac{ab + b^2 - ab}{a+b}\right) \\ &= \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \\ &= m^2\end{aligned}$$

Barème :

1)	7 pts
2)	7 pts
3)	9 pts

Présentation et idées 2pts

2) Egalité 2 :

$$\begin{aligned}(a-n)(b+n) &= \left(a + \frac{ab}{a-b}\right)\left(b - \frac{ab}{a-b}\right) \\ &= \left(\frac{a^2 - ab + ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab - b^2 - ab}{a-b}\right) \\ &= -\left(\frac{ab}{a-b}\right)^2 \\ &= -n^2\end{aligned}$$

3) Calcul de x et y :

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{15}{8}\right)\left(y - \frac{15}{8}\right)\left(x - \frac{15}{2}\right)\left(y + \frac{15}{2}\right) &= -\left(\frac{15}{4}\right)^4 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{5 \times 3}{5+3}\right)\left(y - \frac{5 \times 3}{5+3}\right)\left(x - \frac{5 \times 3}{5-3}\right)\left(y + \frac{5 \times 3}{5-3}\right) &= -\left(\frac{3 \times 5}{3-5}\right)^2 \times \left(\frac{5 \times 3}{5+3}\right)^2\end{aligned}$$

Or d'après la question 1 : $\boxed{\left(3 - \frac{5 \times 3}{5+3}\right)\left(5 - \frac{5 \times 3}{5+3}\right) = \left(\frac{5 \times 3}{5+3}\right)^2}$

et d'après la question 2 : $\left(3 + \frac{3 \times 5}{3-5}\right)\left(5 - \frac{3 \times 5}{3-5}\right) = -\left(\frac{3 \times 5}{3-5}\right)^2$

Donc $\left(3 - \frac{5 \times 3}{5-3}\right)\left(5 + \frac{5 \times 3}{5-3}\right) = -\left(\frac{3 \times 5}{3-5}\right)^2$

Alors, des valeurs possibles de réels x et y sont $x = 3$ et $y = 5$.

Exercice 3: (25 points)

Soit $a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}$; $b = \frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ et $F = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$

- 1) Comparer les nombres a et b.
- 2) Ecrire F sous la forme $x + y\sqrt{z}$ où x ; y sont des nombres rationnels et z l'entier naturel le plus petit possible.

Corrigé de l'Exercice 3

1) Comparaison de a et b

$a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}$ $\begin{cases} \sqrt{4+\sqrt{7}} > \sqrt{4-\sqrt{7}} \\ \sqrt{3+\sqrt{5}} > \sqrt{3-\sqrt{5}} \end{cases}$ $\Rightarrow a > 0$	$b = \frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ $\begin{cases} \sqrt{6+\sqrt{11}} > \sqrt{6-\sqrt{11}} \\ \sqrt{4+2\sqrt{3}} > \sqrt{4-2\sqrt{3}} \end{cases}$ $\Rightarrow b > 0$
<p>Calculons a^2</p> $a^2 = \left(\frac{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2}{(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2}$ $= \frac{4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \times \sqrt{4-\sqrt{7}} + 4 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5}}$ $= \frac{8 - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}}{6 - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \frac{8 - 2\sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2}}{6 - 2\sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2}}$ $= \frac{8 - 2\sqrt{16-7}}{6 - 2\sqrt{9-5}} = \frac{8 - 2\sqrt{9}}{6 - 2\sqrt{4}} = \frac{8-6}{6-4} = \frac{2}{2} = 1$	<p>Calculons b^2</p> $b^2 = \left(\frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}})^2}{(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}})^2}$ $= \frac{6 + \sqrt{11} - 2\sqrt{6+\sqrt{11}} \times \sqrt{6-\sqrt{11}} + 6 - \sqrt{11}}{4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 4 - 2\sqrt{3}}$ $= \frac{12 - 2\sqrt{(6+\sqrt{11})(6-\sqrt{11})}}{8 - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}} = \frac{12 - 2\sqrt{6^2 - \sqrt{11}^2}}{8 - 2\sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2}}$ $= \frac{12 - 2\sqrt{36-11}}{8 - 2\sqrt{16-12}} = \frac{12 - 2\sqrt{25}}{8 - 2\sqrt{4}} = \frac{12-10}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
<p>Comme $\begin{cases} a^2 > b^2 \\ a > 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}$ alors $a > b$</p>	

2) Comme $\begin{cases} a^2 = 1 \text{ et } b^2 = \frac{1}{2} \\ a > 0 \text{ et } b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$F = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \Rightarrow F = \frac{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{3}{2+\sqrt{2}} = \frac{3(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{6-3\sqrt{2}}{2^2 - \sqrt{2}^2}$$

$$= \frac{6-3\sqrt{2}}{4-2} = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}$$

Enfin $F = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Barème :

1) Calcul de a^2 _____ 5pts

Calcul de b^2 _____ 5pts

Conclusion $a > b$ _____ 5pts

2) Remplacement dans F _____ 3pts

Calculs _____ 3pts

Résultat final _____ 2pts

Présentation et maîtrise des calculs _____ 2pts

Exercice 4: (25 points)

Sur la figure ci-contre :

(C) est un cercle de centre A

Les points B, A et F sont alignés

Le point J est le milieu de [BI].

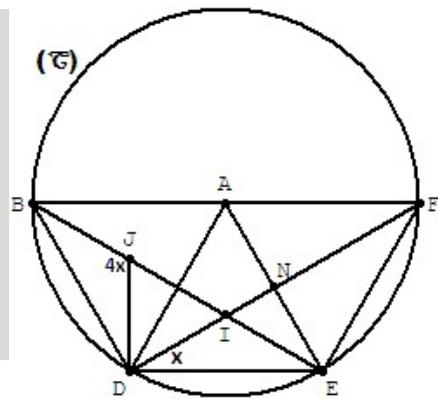
(AD) // (EF); $\widehat{BJD} = 4x$ et $\widehat{EDF} = x$.

1) Montrer que le triangle IDE est isocèle en I

2) Exprimer en fonction de x les mesures des angles

\widehat{BFD} , \widehat{ADF} , \widehat{EBF} et \widehat{DFE} .

3) En déduire la valeur de x.



Corrigé de l'Exercice 4

1) On a :

* Le triangle BDI est rectangle en D et J est le milieu [BI], donc $\widehat{BID} = \frac{\widehat{BJD}}{2} = 2x$

$$\begin{aligned} * \widehat{EID} &= 180^\circ - \widehat{BID} \\ &= 180^\circ - 2x \end{aligned}$$

* Dans le triangle IDE :

$$\begin{aligned} \widehat{IED} &= 180^\circ - (\widehat{EID} + \widehat{IDE}) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2x + x) = x \end{aligned}$$

* Comme $\widehat{IED} = \widehat{IDE}$ alors le triangle IDE est isocèle en I .

2) * Les angles inscrits \widehat{BFD} et \widehat{BED} interceptent le même arc \widehat{BD} ,

$$\text{Donc } \widehat{BFD} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{BFD} = x$$

• Le triangle ADF est isocèle en A donc

$$\widehat{ADF} = \widehat{AFD} \text{ or } \widehat{AFD} = \widehat{BFD} = x \text{ donc } \widehat{ADF} = x$$

• Les angles inscrits \widehat{EBF} et \widehat{EDF} interceptent le même arc \widehat{EF} , donc

$$\widehat{EBF} = \widehat{EDF} \Rightarrow \widehat{EBF} = x$$

\widehat{DFE} et \widehat{ADF} sont deux angles alternes-internes et (AD) // (EF) donc $\widehat{DFE} = \widehat{ADF}$ alors

$$\widehat{DFE} = x$$

3) * L'angle inscrit \widehat{BFD} et l'angle au centre \widehat{BAD} interceptent le même arc \widehat{BD} , donc

$$\widehat{BAD} = 2 \times \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{BAD} = 2x$$

• L'angle inscrit \widehat{EBF} et l'angle au centre \widehat{EAF} interceptent le même arc \widehat{EF} , donc

$$\widehat{EAF} = 2 \times \widehat{EBF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 2x$$

• On a :

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{EAD} &= 180^\circ - (\widehat{EAF} + \widehat{BAD}) = 180^\circ - (2x + 2x) = 180^\circ - 4x \\ \widehat{EAD} &= 2 \times \widehat{EDF} = 2x \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x &= 180^\circ - 4x \Rightarrow 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \end{aligned}$$

Fin.

Barème :

1) _____ 5 pts

2) \widehat{BFD} _____ 3 pts

\widehat{ADF} _____ 3 pts

\widehat{EBF} _____ 3 pts

\widehat{DFE} _____ 3 pts

3) Valeur de x _____ 6 pts

Présentation et idées _____ 2pts