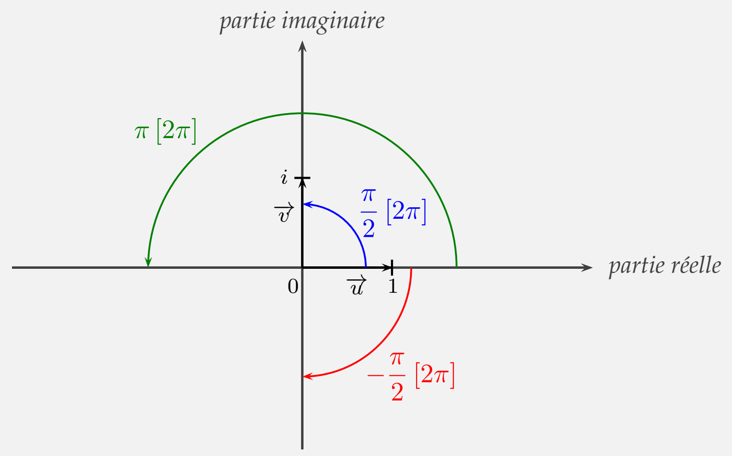
Les nombres complexes

Pr.Abdelwahed

Lien complexes-trigonométrie

- Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $z = x + iy$, pour lequel x et y sont **deux nombres réels**, et i est un **nombre imaginaire** tel que $i^2 = -1$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe z admet une unique écriture algébrique $z = x + iy$:
  - x s'appelle **la partie réelle** de z, on la note $\mathfrak{Re}(z)$.
  - y s'appelle **la partie imaginaire** de z, on la note $\mathfrak{Im}(z)$.
- Un nombre complexe z est **imaginaire pur** si et seulement si sa **partie réelle est nulle**.
  - Par exemple, les nombres complexes $5i$ et $-i\sqrt{3}$ sont des imaginaires purs.
- **Le conjugué** du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$
  - On utilise **l'expression conjuguée** d'une expression pour rendre réel le dénominateur d'un nombre complexe écrit sous la forme d'une fraction.
- **Le module** du nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, est le **réel positif** noté $|z|$, défini par $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - Le module d'un nombre **réel** est sa **valeur absolue**, par exemple $|2021| = 2021$ et $\left|-\sqrt{2022}\right| = \sqrt{2022}$
  - Le module d'un nombre **imaginaire pur** est la **valeur absolue** de sa partie imaginaire, par exemple $\left|\frac{4i}{3}\right| = \frac{4}{3}$ et $\left|-\sqrt{7}i\right| = \sqrt{7}$
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
  - L'**image** du nombre complexe $z = x + iy$ est le point M de coordonnées (x, y).
  - L'**affixe** du point M de coordonnées (x, y) est le nombre complexe $z = x + iy$.
  - On appelle **argument** d'un nombre complexe non nul z et on la note $\arg(z)$, toute **mesure en radians** de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$.
- Un nombre complexe non nul z admet **trois** types d'écriture :
  - Une **écriture algébrique** $z = x + iy$, où x et y sont deux nombres réels, $x = \mathfrak{Re}(z)$ est la **partie réelle** de z et $y = \mathfrak{Im}(z)$ sa **partie imaginaire**.
  - Une **écriture trigonométrique** $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, où r désigne **le module** de z et θ **un argument** de z.
  - Une **écriture exponentielle** $z = re^{i\theta}$, avec $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Représentation graphique



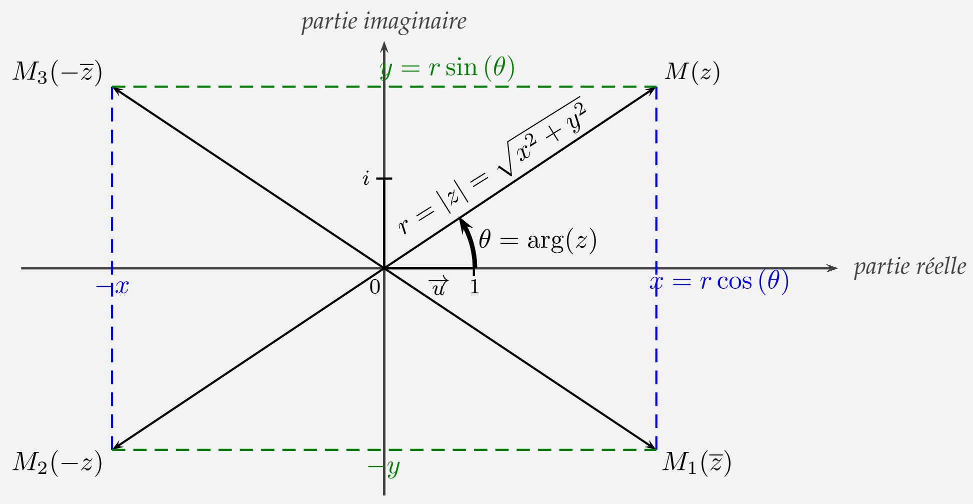
Résultats

Soit z un nombre complexe non nul.

1)
- z est un **réel strictement positif** $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$.
- z est un **réel strictement négatif** $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$.
- z est un **réel non nul** $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$.

2)
- z est un **imaginaire pur** de partie imaginaire **strictement positive** $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- z est un **imaginaire pur** de partie imaginaire **strictement négative** $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- z est un un **imaginaire pur non nul** $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Représentation graphique



Résultats

Si $z = x + iy$ la forme algébrique d'un nombre complexe non nul z et $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ sa forme trigonométrique, alors on a :

- $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$
- $\cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
- $-\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$
- $-\cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$

Propriétés sur les conjugués

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ et $z - \overline{z} \in i\mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$
- $z = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$

Propriétés sur les modules

- $z \times \overline{z} = |z|^2$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriétés sur les arguments

- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

Propriétés de l'exponentielle

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- $re^{i\theta} \times re^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Comment résoudre une équation dans l'ensemble des nombres complexes ?

On rencontre essentiellement trois types d'équations dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

1) Dans le cas d'une **équation du premier degré** de la forme $az+b=0$ où a est un réel non nul, les méthodes de résolution sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

2) Dans le cas d'une **équation du second degré** à coefficients réels de la forme $az^2+bz+c=0$ où a est un réel non nul, on calcule **le discriminant** $\Delta = b^2-4ac$:

- ✧ Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet **deux solutions réelles distinctes** $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ✧ Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet **une solution réelle double** $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- ✧ Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet **deux solutions complexes conjuguées** $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

3) Dans le cas d'une équation faisant intervenir $\overline{z}$ (le conjugué de z) ou $|z|$ (son module) on pose $z = x+iy$, puis on fait appel au théorème suivant :

*Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont **même partie réelle** et **même partie imaginaire**.*

Les nombres complexes et la géométrie

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère quatre points A, B, C et D **deux à deux distincts**.

- ✧ $z_O = 0, z_{\overrightarrow{u}} = 1$ et $z_{\overrightarrow{v}} = i$.
- ✧ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- ✧ L'affixe du milieu K du segment $[AB]$ est $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
- ✧ La distance AB est égale à $AB = |z_B - z_A|$.
- ✧ z un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z, alors $|z| = OM$.
- ✧ Un argument de z est une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$.
- ✧ La mesure d'un angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) [2\pi]$.
- ✧ A, B et C alignés $\iff \dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \in \mathbb{R}$.
- ✧ $(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **perpendiculaires** $\iff \dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A} \in i\mathbb{R}$
- ✧ $(AB) \,//\, (CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** $\iff \dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}$
- ✧ A, B, C et D sont **cocycliques** ou **alignés** $\iff \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \times \dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_D} \in \mathbb{R}$.

Nature d'un triangle

Pour montrer qu'un triangle ABC est :

- ✧ **Isocèle en A :** $AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \iff \left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1$
- ✧ **Équilatéral :** $\begin{cases} ABC \text{ isocèle en A} \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases} \iff \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{i\pm\frac{\pi}{3}}$.
- ✧ **Rectangle en A :** $(AB) \perp (AC) \iff \dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \in i\mathbb{R}$.
- ✧ **Rectangle isocèle en A :** $\begin{cases} AB = AC \\ (AB) \perp (AC) \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1 \\ \dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \in i\mathbb{R} \end{cases} \iff \dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \pm i.$

Ensemble de points dont l'affixe vérifie une propriété

L'ensemble des points M d'affixe z tels que

- ✧ $|z - z_A| = r$: est le cercle de centre A d'affixe z_A et de rayon r.
- ✧ $|z - z_A| = |z - z_B|$: est la médiatrice du segment $[AB]$.

Formule de Moivre-Formules d'Euler

✧ Formule de **Moivre** : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall \theta \in \mathbb{R})$, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

☞ La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ pour tout entier $n \geq 2$ sous forme d'un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

✧ Formules d'**Euler** : $(\forall \theta \in \mathbb{R})$ $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $(\forall \theta \in \mathbb{R})$ $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

☞ Les formules d'Euler permettent de transformer un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x (linéarisation).

Transformations géométriques et nombres complexes

Soit un point M du plan, d'affixe z.

✧ **Translation** : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe $z_{\overrightarrow{u}}$.

- M' l'image de M par la translation t de vecteur $\iff \overrightarrow{u}t_{\overrightarrow{u}}(M) = M'$ $\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \iff z' - z = z_{\overrightarrow{u}} \iff \boxed{z' = z + z_{\overrightarrow{u}}}$.

✧ **Homothétie** : Soient Ω un point du plan d'affixe ω, et k un réel non nul.

- M' l'image de M par l'homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \iff h(M) = M'$ $\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M} \iff z' - \omega = k(z - \omega) \iff \boxed{z' = k(z-\omega) + \omega}$.

✧ **Rotation** : Soient Ω un point du plan d'affixe ω, et θ un réel.

- Ω **est** l'image de Ω par la rotation R de centre Ω, c'est-à-dire $R(\Omega) = \Omega$
- M' l'image de $M \neq \Omega$ par la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \iff R(M) = M'$ $\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \iff z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \iff \boxed{z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega}$.

Nature d'une transformation

La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $\boxed{z' = az + b}$

- ✧ Si $a = 1$ alors la transformation f est une **translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $\boxed{z_{\overrightarrow{u}} = b}$.
- ✧ Si $a \in \mathbb{R}^*$ alors la transformation f est une **homothétie** de centre Ω d'affixe $\boxed{\omega = \dfrac{b}{1-a}}$ et de rapport $\boxed{k = a}$.
- ✧ Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ avec $|a| = 1$ alors la transformation f est une **rotation** de centre Ω d'affixe $\boxed{\omega = \dfrac{b}{1-a}}$ et d'angle $\boxed{\theta \equiv \arg(a)\,[2\pi]}$.

Quadrilatères particuliers

Pour montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est :

✧ **Un parallélogramme :** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff z_B - z_A = z_C - z_D$
ou $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu $\iff \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{z_B+z_D}{2}$

✧ **Un rectangle :** $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit $\iff z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B} \in i\mathbb{R}$
ou $ABCD$ est un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur $\iff \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{z_B+z_D}{2}$ et $|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

✧ **Un losange :** $ABCD$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur $\iff z_B - z_A = z_C - z_D$ et $|z_B - z_A| = |z_C - z_B|$
ou $ABCD$ est un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires $\iff \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{z_B+z_D}{2}$ et $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B} \in i\mathbb{R}$

✧ **Un carré :** $ABCD$ est parallélogramme de deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur $\iff z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \pm i$
ou $ABCD$ est parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires et de même longueur $\iff \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{z_B+z_D}{2}$ et $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B} = \pm i$