Les nombres complexes

L'ensemble ℂ

- Il existe un nombre imaginaire noté i et viréfié : $i^2 = -1$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté ℂ .
- Tout nombre complexe s'écrite sous la forme : $Z = x + iy$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$ ($l'écriture\ algébrique\ de\ Z$)
- x est appelé <u>la partie réel de Z</u> et noté : $Re(Z) = x$.
- y est appelé <u>la partie imaginaire de Z</u> et noté : $Im(Z) = y$.
- $Im(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$.
- $Si\ Re(Z) = 0\ et\ Im(Z) \neq 0$ alors Z est un <u>imaginaire pour</u> C-à-d $Z \in i\mathbb{R}$
- Les opérations sur l'ensemble ℝ reste valable pour l'ensemble ℂ .

L'égalité de deux nombres complexes

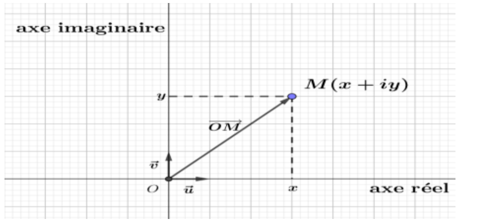
- $Z = Z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(Z) = Re(Z') \\ Im(Z) = Im(Z') \end{cases}$

La représentation géométrique d'un nombre complexe .

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{U}; \vec{V})$

Soit $Z = x + iy\ \ avec\ x, y \in \mathbb{R}$.

- Le point $M(x; y)$ est appelé <u>l'image de Z</u> et noté : $M(Z)$.
- Le nombre Z est appelé <u>l'affixe de M</u> et noté : $aff(M) = Z$.
- Le nombre Z est appelé aussi <u>l'affixe de $\overrightarrow{OM}$</u> et noté : $aff(\overrightarrow{OM}) = Z$.
- $aff(\overrightarrow{AB}) = Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$



le milieu de $[AB]$

L'affixe du point I le milieu de $[AB]$ est :

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

Points alignés:

$A(z_A), B(z_B) et\ C(z_C)$ *trois points alignés si :* $\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} \in \mathbb{R} \quad (Z_A \neq Z_C)$

Points cocycliques :

$A(z_A), B(z_B), C(z_C)\ et\ D(z_D)$ *quatre points alignés si :*

$$\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} \times \frac{Z_B - Z_C}{Z_D - Z_C} \in \mathbb{R} \quad (Z_A \neq Z_B\ et\ Z_D \neq Z_C)$$

Le conjugué d'un nombre complexe

- Soit $Z = x + iy\ \ avec\ x, y \in \mathbb{R}$
  Le conjugué de Z est le nombre complexe : $\overline{Z} = x - iy$.
- $\overline{Z + Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$
- $\overline{Z \times Z'} = \overline{Z} \times \overline{Z'}$
- $\overline{Z^n} = \overline{Z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}} \qquad , Z' \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \frac{1}{\overline{Z}} \qquad , Z \neq 0$
- *Z un nombre réel* $\Leftrightarrow \overline{Z} = Z$.
- *Z un imaginaire pur* $\Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$.
- $Z + \overline{Z} = 2Re(Z)$
- $Z - \overline{Z} = 2iIm(Z)$
- $Z\overline{Z} = x^2 + y^2$

Le module d'un nombre complexe

- Soit $Z = x + iy\ \ avec\ x, y \in \mathbb{R}$
  Le module de Z est le nombre réel :
  $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$
- $|Z| = |\overline{Z}| = |-Z|$
- $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|} \quad ; Z' \neq 0$
- $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|} \quad ; Z \neq 0$
- $|Z^n| = |Z|^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$

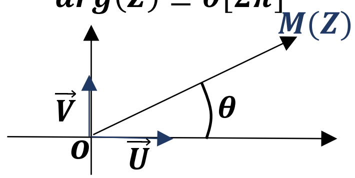
La distance AB :

$$AB = |Z_B - Z_A|$$

L'argument d'un nombre complexe

L'argument de Z est tout mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{U}; \overrightarrow{OM})$ ($M\ est\ l'image\ de\ Z$) et noté $arg(Z)$

$arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$



Cas particulier :

- $Z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow arg(Z) \equiv 0[2\pi]$.
- $Z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow arg(Z) \equiv \pi[2\pi]$.
- $Z \in i\mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $Z \in i\mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow arg(Z) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

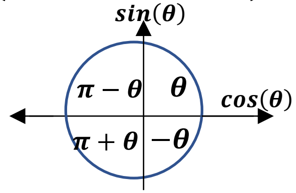
La forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe non nul .
$arg(Z) \equiv \theta[2\pi]\ \ et\ |Z| = r$.

<u>*Prof Abdelwahed Haddad*</u>

La forme trigonométrique de Z est :

$$Z = r(cos(\theta) + isin(\theta)) = [r; \theta]$$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Exemples :

- $Z = 2 \ \Leftrightarrow arg(Z) \equiv 0[2\pi]$.
- $Z = -4 \ \Leftrightarrow arg(Z) \equiv \pi[2\pi]$.
- $Z = i \ \Leftrightarrow arg(Z = i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $Z = -2i \Leftrightarrow arg(Z) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

Propriété de l'argument :

Soit Z et Z' deux nombres complexes .

- $arg(Z \times Z') \equiv arg(Z) + arg(Z')[2\pi]$
- $arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) \equiv arg(Z) - arg(Z)[2\pi]$
- $arg\left(\frac{1}{Z}\right) \equiv -arg(Z)[2\pi]$
- $arg(Z^n) \equiv n\ arg(Z)[2\pi]\ (n \in \mathbb{N}^*)$
- $arg(\overline{Z}) \equiv -arg(Z)[2\pi]$
- $arg(-Z) \equiv \pi + \ arg(Z)[2\pi]$

Formule de Moivre :

Soit Z un nombre complexe non nul tel que : $Z = |Z|(cos(\theta) + isin(\theta))$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$Z^n = |Z|^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$$

<u>*Prof Abdelwahed Haddad*</u>

Propriétés de la forme Trigo

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z=[r;\theta]$ et $Z'=[r';\theta']$

- $ZZ'=[rr';\theta+\theta']$
- $\frac{Z}{Z'}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$ avec $Z'\neq 0$
- $\frac{1}{Z}=\left[\frac{1}{r};-\theta\right]$ avec $Z\neq 0$
- $Z^n=[r^n;n\theta]$, $n\in\mathbb{N}^*$ $(Moivre)$
- $\overline{Z}=[r;-\theta]$
- $-Z=[r;\pi+\theta]$

Mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})\equiv \arg\left(\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A}\right)[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv \arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)[2\pi]$$

$A\neq B$

Nature du triangle ABC

- ***ABC triangle isocèle en A si :***

$AC=AB$ **C-à-d** $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=[1;\theta]$

- ***ABC triangle équilatéral si :***
  - ❖ $AC=AB=BC$
  - ❖ $AC=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$

  C-à-d $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$

Prof Abdelwahed Haddad $A\neq B$

- ***ABC triangle rectangle en A si :***

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

C-à-d $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$

- ***ABC triangle rectangle et isocèle en A si :***

$AC=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

C-à-d $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$

$A\neq B$

Résolution d'équation : $a\neq 0$

$az^2+bz+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

On calcule : $\Delta=b^2-4ac$

❖ $\Delta>0$ alors : $\begin{cases}Z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ Z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$

❖ $\Delta=0$ alors : $Z=-\frac{b}{2a}$

❖ $\Delta<0$ alors : $\begin{cases}Z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\\ Z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\overline{Z_1}\end{cases}$

La forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe non nul .
$\arg(Z)\equiv\theta[2\pi]$ *et* $|Z|=r$.
La forme exponentielle de Z est :

$$Z=re^{i\theta}$$

Les formules d'Euler

Soit Z un nombre complexe non nul.
$\arg(Z)\equiv\theta[2\pi]$ *et* $|Z|=1$.

Prof Abdelwahed Haddad

❖ $\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

❖ $\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule d'angle moitié

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\left(e^{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}}+e^{\frac{-i(\alpha-\beta)}{2}}\right)$$

Ecriture complexe des transformation géométrique

❖ La translation $T(\vec{u})$

L'écriture complexe de la translation T de vecteur $\vec{u}(Z_{\vec{u}})$ qui transforme le point $M(z)$ au point $M'(z')$ est :

$T_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow Z'=Z+Z_{\vec{u}}$

❖ La Rotation $R(\Omega(\omega);\theta)$

L'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ et qui transforme le point $M(z)$ au point $M'(z')$ est :

$R(M)=M' \Leftrightarrow Z'-\omega=e^{i\theta}(Z-\omega)$

Remarque :

Si $R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}\Omega M=\Omega M'\\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$

❖ L'homothétie $h(\Omega(\omega);k)$

L'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k et qui transforme le point $M(z)$ au point $M'(z')$ est :

$h(M)=M' \Leftrightarrow Z'-\omega=k(Z-\omega)$

L'ensemble des points $M(Z)$

Soient $A(Z_A)$, $B(Z_B)$ et $M(Z)$ trois points et $r>0$

L'ensemble des points $M(z)$ qui vérifient :

❖ $|Z-Z_A|=r \Leftrightarrow AM=r$
Est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon r .

❖ $|Z-Z_A|=|Z-Z_B| \Leftrightarrow AM=BM$
Est la médiatrice du segment $[AB]$

❖ $\frac{Z-Z_A}{Z-Z_B}\in\mathbb{R}$
Est la droite (AB) privée du point B .

❖ $\frac{Z-Z_A}{Z-Z_B}\in i\mathbb{R}$
Est le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ privée du point B .

Prof Abdel 1