Prof Abdel 1

Etude d'une suite numérique

2ème Année baccalauréat
Sciences physiques
2023/2024

Voici quelques questions rencontrer lors d'une étude d'une suite numérique

Soient (u_n) une suite numérique définie par son premier terme u_{n_0} et par la forme récurrente u_{n+1}
($n_0 \in \mathbb{N}$ est la première valeur de n)

<u>Rappel</u> : Raisonnement par récurrence

Considérons une proposition dépendant d'un entier naturel n, que l'on nomme $P(n)$.
Le raisonnement par récurrence permet de démontrer que $P(n)$ est vraie en trois étapes :

- <u>Etape 1</u> : **Vérification**
  On vérifie que la proposition est vraie pour un entier n_0 .
- <u>Etape 2</u> : **Hérédité**
  On suppose que la proposition est vraie à un rang $n > n_0$ et on démontre qu'elle est vraie au rang $n + 1$, le rang suivant. Si c'est le cas.
- <u>Etape 3</u> : **Conclusion**
  On conclut que la proposition est vraie pour tout n.

Questions	Méthodes
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée** par M	Il suffit de montrer par récurrence que : $(\forall n \geq n_0);\ \boldsymbol{u_n \leq M}$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **minorée** par m	Il suffit de montrer par récurrence que : $(\forall n \geq n_0);\ \boldsymbol{u_n \geq m}$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **bornée**	Il suffit de montrer par récurrence que : $(\forall n \geq n_0);\ \boldsymbol{m \leq u_n \leq M}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **croissante**	On doit prouver que : $\boldsymbol{u_{n+1}-u_n\geq 0}$ ou $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1}$ Remarque : si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante alors : $(\forall n\geq n_0)$; $\boldsymbol{u_n\geq u_{n_0}}$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **décroissante**	On doit prouver que $\boldsymbol{u_{n+1}-u_n\leq 0}$ ou $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1}$ Remarque : si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante alors : $(\forall n\geq n_0)$; $\boldsymbol{u_n\leq u_{n_0}}$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **convergente**	On doit conclut que : • $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **croissante** et **majorée** ou • $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **décroissante** et **minorée**
Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique**	Il suffit de montrer que $(\forall n\geq n_0)$; $\boldsymbol{v_{n+1}-v_n=r}$, tel que le réel r est la raison de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$
Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique**	Il suffit de montrer que $(\forall n\geq n_0)$; $\boldsymbol{v_{n+1}=q\times v_n}$, tel que le réel q est la raison de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$
Calculer $\boldsymbol{v_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$. Sachant que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique**	Utilisez la formule $(\forall n\geq n_0)$; $\boldsymbol{v_n=v_{n_0}+(n-n_0)r}$
Calculer $\boldsymbol{v_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$. Sachant que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique**	Utilisez la formule $(\forall n\geq n_0)$; $\boldsymbol{v_n=v_{n_0}\times q^{n-n_0}}$
Calculer la somme : $\boldsymbol{v_p+v_{p+1}+\cdots+v_n}$ Sachant que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique** et $p<n$	Utilisez la formule $\boldsymbol{v_p+v_{p+1}+\cdots+v_n=\frac{v_p+v_n}{2}(n-p+1)}$
Calculer la somme : $\boldsymbol{v_p+v_{p+1}+\cdots+v_n}$ Sachant que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique** et $p<n$	Utilisez la formule $\boldsymbol{v_p+v_{p+1}+\cdots+v_n=v_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	• Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites telles que : $(\forall n\geq n_0);\ u_n\leq v_n$: → Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n}=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n}=+\infty$ → Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n}=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n}=-\infty$ • Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites telles que : : → Si $\begin{cases}(\forall n\geq n_0);\ w_n\leq u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{w_n}=\boldsymbol{l}\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n}=\boldsymbol{l}$ → Si $\begin{cases}(\forall n\geq n_0);\ \lvert u_n-l\rvert\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n}=\boldsymbol{0}\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n}=\boldsymbol{l}$ • Soient q un nombre réel et n un entier naturel → Si $-1<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{q^n}=\boldsymbol{0}$ → Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{q^n}=\boldsymbol{1}$ → Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{q^n}=+\infty$ → Si $q\leq-1$ alors $\boldsymbol{q^n}$ **n'a pas de limite** • Suite de la forme $\begin{cases}\boldsymbol{u_{n_0}}\\ \boldsymbol{u_{n+1}}=\boldsymbol{f(u_n)}\end{cases}$ Soit f une fonction numérique **continue** sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ telle que $\boldsymbol{f(I)\subset I}$ et $\boldsymbol{u_{n_0}\in I}$, si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **convergente** alors sa limite $\boldsymbol{l}$ est la solution de l'équation : $\boldsymbol{f(x)=x}$ pour tout $x\in I$