I. Ordre et opérations

1. Ordre

Activité

1) Comparer $3\sqrt{3}$ et $1+3\sqrt{2}$
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$
   a) Montrer que $\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
   b) Comparer $\frac{1}{2x}$ et $\sqrt{x^2+1}-x$.

Définition

Soient a et b deux nombres réels.

- Si $a \leq b$ alors $(a-b) \leq 0$, on dit que $(a-b) \in \mathbb{R}^-$
- Si $a < b$ alors $(a-b) < 0$, on dit que $(a-b) \in \mathbb{R}_-^*$
- Si $a \geq b$ alors $(a-b) \geq 0$, on dit que $(a-b) \in \mathbb{R}^+$
- Si $a > b$ alors $(a-b) > 0$, on dit que $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

Application

1) Comparer a et b dans les cas suivants :
   i. $a = \sqrt{4n^2+1}$; $b = 2n+1$ $n \in \mathbb{N}$
   ii. $a = \frac{7x+2y}{7x}$; $b = \frac{8y}{7x+2y}$ $(x \in \mathbb{R}_+^*; y \in \mathbb{R}_+^*)$
2) Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq y \leq 3$
   i. Montrer que $x+y-6 \leq 0$
   ii. Comparer x^2-6x+1 et y^2-6y+1

Propriétés :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

* Si $a \leq b$alors $a+c \leq b+c$.
* Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$.
* Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$.
* Si $a \leq b$et $c < 0$ alors $ac \geq bc$.
* Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $a \times c \leq b \times d$.
* Si $0 < a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
* Si $0 < a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$.
* Si $a \leq b < 0$ alors $a^2 \geq b^2$.
* Si $a$et b ont même signe et $a \leq b$alors on a $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$; $(a \neq 0; b \neq 0)$.

Exemples :

- $a \leq \frac{5}{7}$ et $b \leq \frac{9}{7}$ alors $a+b \leq 2$

- $-4 \leq -2$ *Alors* ''$(-12 \leq -6$ *car* $3 > 0)$; $(8 \geq 4$ *car* $-2 < 0)$''
- $1 < \frac{3}{2}$ *et* $\frac{1}{2} < 2$ *alors* $1 \times \frac{1}{2} < 3$
- $-5 \leq -\frac{1}{2}$ *Alors* $\frac{1}{-5} \geq -2$
- $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ *Alors* $3 > 2$
- $2 \leq \sqrt{5}$ *Alors* $2^2 \leq \sqrt{5}^2$
- $-4 < -3$ *Alors* $(-4)^2 > (-3)^2$

2. Encadrement :

Définition

Soient a,$b$et x deux nombres réels tels que $a < b$

Chaque double inégalité parmi, ces doubles inégalités suivantes $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x < b$ est appelée ***encadrement*** de x d'amplitude $b - a$.

Exemple :

$3.13 \leq \pi \leq 3.14$est un encadrement π de et d'amplitude $3.14 - 3.13 = 0.01$.

Propriété

Soient a, b, c,d, x et y des nombres réels.

* Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $a - d \leq x - y \leq b - c$
* a, b, c et d des nombres réels positifs ; Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$.
* a, b, c et d des nombres réels négatifs ; Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $b \times d \leq x \times y \leq a \times c$.
* a et b des nombres réels positifs ; Si $a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$.
* a et b des nombres réels négatifs ; Si $a \leq x \leq b$ alors $b^2 \leq x^2 \leq a^2$
* a, b, c et d des nombres réels ont même signe si alors $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$alors : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$.

Application

On considère les nombres réels x, y et z tels que :

$2 \leq x \leq 4$; $-3 \leq y \leq 1$; $-1{,}5 \leq z \leq -0{,}5$

Trouver un encadrement des nombres suivants :

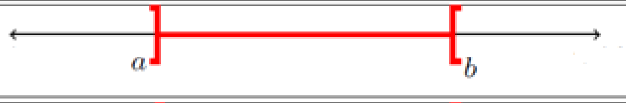
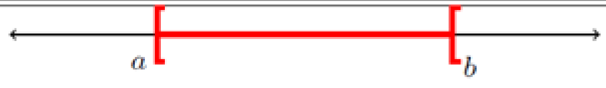
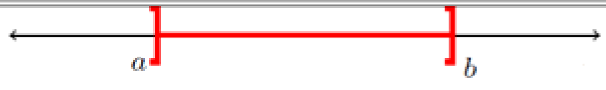
$x - y$; $x \times y$; $x^2 + y^2 + z^2$; $\frac{x+2}{z}$.

II. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ On définit les différents intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

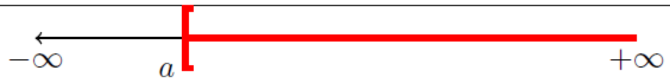
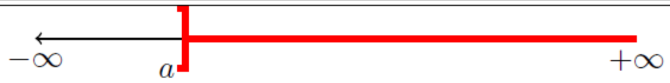
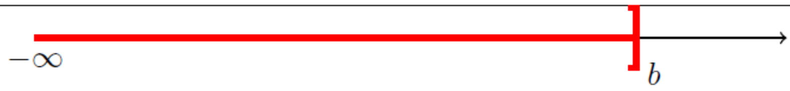
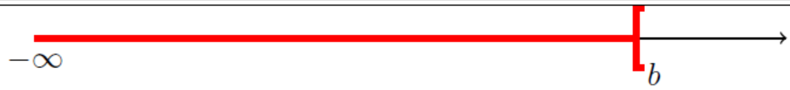
1. Intervalles bornés

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles bornés

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a;b]$ intervalle fermé	$a \leq x \leq b$	
$]a;b[$ intervalle ouvert	$a < x < b$	
$[a;b[$ intervalle semi-ouvert (ouvert en b)	$a \leq x < b$	
$]a;b]$ intervalle semi-ouvert (ouvert en a)	$a < x \leq b$	

2. *Intervalles non bornés*

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles non bornés.

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Remarque :

- $+\infty$ (Plus l'infinie) et $-\infty$ (moins l'infinie) ne sont pas des nombres ce sont des symboles.
- Par convention le **crochet «]** » au voisinage de ∞ est ***toujours ouvert***.
- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = 0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$; $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément, il se note $\emptyset$.

Exemples

• $\{x \in \mathbb{R}/-3 \leq x \leq 7\}$ Équivaut à $x \in [-3;7]$. • $\{x \in \mathbb{R}/2 < x \leq 6\}$ Équivaut à $x \in]2;6]$	• $\{x \in \mathbb{R}/x \geq 2\}$ Équivaut à $x \in 2;+\infty[$. • $\{x \in \mathbb{R}/x > -2\}$ Équivaut à $x \in]-2;+\infty[$.

• $\{x \in \mathbb{R}/-4 < x < 3\}$ Équivaut à $x \in]-4;3[$. • $\{x \in \mathbb{R}/-1 \leq x < 4\}$ Équivaut à $x \in -1;4[$	• $\{x \in \mathbb{R}/x < -5\}$ Équivaut à $x \in]-\infty;-5[$. • $\{x \in \mathbb{R}/x \leq -3\}$ Équivaut à $x \in]-\infty;-3]$

3. *Intersection et réunion de deux intervalles :*

Définition :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

l'intersection des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I ***et*** appartient J et se note $I \cap J$. ($\cap$ se lit ***inter***).

La réunion des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I ***ou*** appartient J et se note $I \cup J$. ($\cup$ se lit ***union***).

Autrement dit :

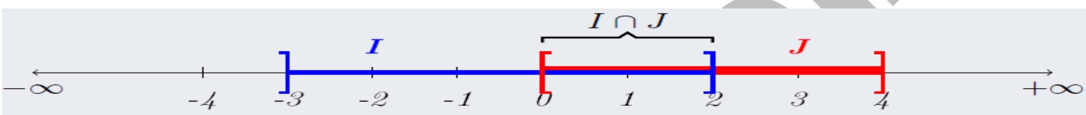
$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I\_et\_x \in J\}.$$

$$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I\_ou\_x \in J\}.$$

Exemples :

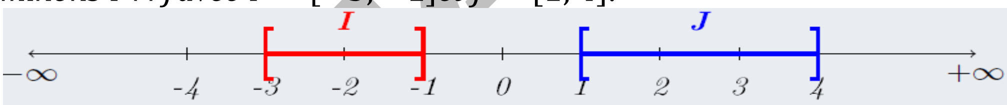
* *Déterminons* $I \cap J$ *avec* $I =]-3; 2]$ *et* $J = [0; 4]$.

Pour visualiser cette intersection, on peut représenter les intervalles I *et* J *sur un même axe gradué.*



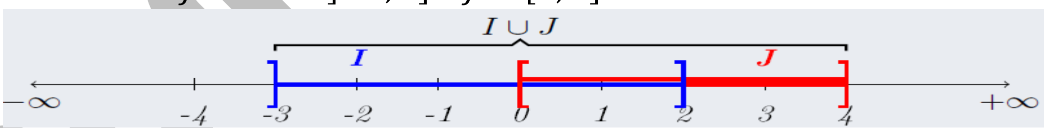
L'intersection des deux intervalles est la zone de l'axe gradué où les deux couleurs se superposent. Ainsi $I \cap J = [0; 2]$.

* *Déterminons* $I \cap J$ *avec* $I = [-3; -1]$ *et* $J = [1; 4]$.



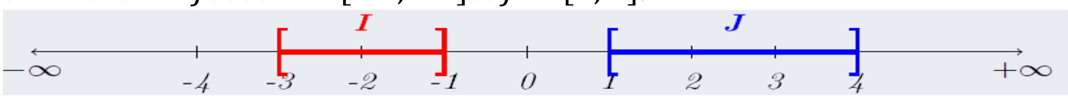
$I \cap J = \emptyset$, *car les ensembles* I *et* J *n'ont pas de zone en commun.*

* *Déterminons* $I \cup J$ *avec* $I =]-3; 2]$ *et* $J = [0; 4]$.



Les nombres de la réunion sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux intervalles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I *soit par l'intervalle* J. *Ainsi* $I \cup J =]-3; 4]$.

* *Déterminons* $I \cup J$ *avec* $I = [-3; -1]$ *et* $J = [1; 4]$.



$I \cup J = [-3; -1] \cup [1; 4]$.

Application :

Déterminer l'intersection et la réunion de I et J dans les cas suivants :

∗ $I = [-10; 2]$ et $J = [-3; 7]$ ∗ $I =]-\infty; 3]$ et $J = -6; +\infty[$ ∗ $I = 7; +\infty[$ et $J = -5; +\infty[$	∗ $I = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right]$ et $J = \left[\frac{5}{7}; 1\right]$ ∗ $I = \left]-\infty; -\frac{5}{4}\right]$ et $J = \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right]$

4. Définitions

Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a < b$ on a :

- L'amplitude de I est le nombre réel A tel que $A = b - a$
- Centre de I est le nombre réel C tel que $C = \frac{a+b}{2}$
- Rayon de I est le nombre réel R tel que : $R = \frac{b-a}{2}$

Remarque

La définition précédente est valable pour les intervalles de forme $a; b[$,$]a; b]$ et $]a; b[$

Exemple

On considère l'intervalle suivant : $I = [-1; 3]$ on a :

- ✓ L'amplitude de I est $A = 3 - (-1) = 4$.
- ✓ Le rayon de I est : $R = \frac{3-(-1)}{2} = 2$.
- ✓ Le centre de I est : $C = \frac{3+(-1)}{2} = 1$.

III. Valeur absolue

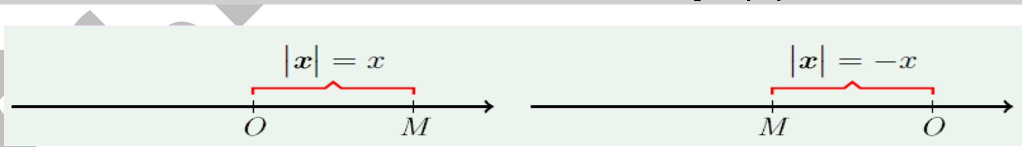
Activité :

1) Placer sur un axe gradué les points suivants : $A(-1), B(3), C(1)$ et $D(5)$
2) Calculer les distances suivantes : AB, AC, BC et AD.

1. Définition

Soit x un réel et M le point d'abscisse x de la droite des réels d'origine O .

La valeur absolue de x est la distance OM et se note $|x|$ telle que $|x| = OM$.



Remarque :

Soit x un nombre réel on a

- ○ $|x| = x$ Si $x \geq 0$
- ○ $|x| \geq 0$ (Toujours positif)
- ○ $|x| = -x$ Si $x \leq 0$
- ○ $-|x| \leq x \leq |x|$
- ○ $|x^2| = |x|^2 = x^2$

Exemple :

$|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ Car $2 - \sqrt{3}$ est positif.
$|\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}$, car $\sqrt{5} - 3$ est négatif.

$|x-1| = x-1$ si $x \geq 1$ et $|x-1| = 1-x$ si $x \leq 1$.

✱ 2. Distance entre deux réels.

Soient a et $b$deux nombres réels

A et B deux points de la droite graduée d'abscisses a et b respectivement.

La distance entre a et $b$est la valeur absolue de leur différence : $AB = |a-b| = |b-a|$.

3. Propriété :

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

- $|x| = |-x|$; $|x-y| = |y-x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $(y \neq 0)$
- $|x| = a$ Si et seulement si $x = a$ ou $x = -a$. (Avec$a \geq 0$)
- $|x| = |y|$ Si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$.

Exemples:

On prend $x = 4$ et $y = -3$

On a $|4+(-3)| = 4-3 = 1$et $|4| + |-3| = 4+3 = 7$donc $|4+(-3)| \leq |4| + |-3|$

On a $|4 \times (-3)| = |-12| = 12$ et $|4| \times |-3| = 4 \times 3 = 12$ donc $|4 \times (-3)| = |4| \times |-3|$

On a $\left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$ et $\frac{|4|}{|-3|} = \frac{4}{3}$donc $\left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{|4|}{|-3|}$

Application

Résoudre les équations suivantes :

- $|x-3| = 2$; $|2x-1| = |3x+4|$
- $|4-3x| = 5$
- $|x+4| = 1$; $|x+5| + |-2x+1| = 0$
- $|x+3| = -2$

4. Valeur absolue et intervalles

Propriété :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

✱ $|x| \leq r$ si et seulement si $-r \leq x \leq r$. (C.à.d. $x \in [-r; r]$).

✱ $|x| \geq r$ si et seulement si $x \leq -r$ou $x \geq r$. (C.à.d.$x \in]-\infty; -r] \cup r; +\infty[$).

✱ $r_1 \leq |x| \leq r_2$ si et seulement si $r_1 \leq x \leq r_2$ ou $r_1 \leq -x \leq r_2$.

Exemples :

5. On a $|x-2| \leq \frac{3}{4}$ signifié que $-\frac{3}{4} \leq x-2 \leq \frac{3}{4}$

Signifie que $-\frac{3}{4} + 2 \leq x \leq \frac{3}{4} + 2$

Signifie que $\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{11}{4}$

D'où $x \in \left[\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right]$.

6. On a $|2x - 1| > 3$ signifié que $2x - 1 < -3$ ou $2x - 1 > 3$

Signifie que $2x < -3 + 1$ ou $2x > 3 + 1$

Signifie que $2x < -2$ ou $2x > 4$

Signifie que $x < -1$ ou $x > 2$

D'ou $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

IV. Approximations – Approximations décimales

1. Approximation par excès -- Approximation par défaut

Définition :

Soit x un réel tel que $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x < b$.

- Le réel a est appelé une ***valeur approchée par défaut*** de x à $b - a$ près.
- Le réel b est appelé une ***valeur approchée par excès*** de x à $b - a$ près.

Exemple :

On a $1,732 < \sqrt{3} < 1.733$ donc

- $1,733$ est une approximation par excès de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} prés (A= $1,733 - 1,732 = 0.001 = 10^{-3}$)
- $1,733$ est une approximation par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} prés.

2. Valeur approchée

Définition

Soient x, a et r trois réels, r est positif.

Si $|x - a| \leq r$ ou $|x - a| < r$, on dit que a est une ***valeur approchée*** de x à r près.

Exemple

On a $|\sqrt{2} - 1,41| \leq 0,01$ donc $1,41$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $0,01$ près.

Remarque

Si $a \leq x \leq b$ alors **:**

- ✓ $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.
- ✓ Tout nombre réel dans $[a; b]$ est une valeur approchée de x à $b - a$ prés.

Exemple :

On a $2,236 \leq \sqrt{5} \leq 2.237$

Donc $\frac{2,236+2.237}{2} = 2.2365$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $\frac{2,237-2,236}{2} = 5 \times 10^{-4}$ prés.

3. Approximation décimale

Définition

Soit$x$ un nombre réel et N est un entier relatif alors il existe un entier naturel p tel que $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$.

Le nombre décimal $N \times 10^{-p}$est dit approximation décimale par défaut de x à 10^{-p}.

Le nombre décimal $(N+1) \times 10^{-p}$est dit approximation décimale par excès de x à 10^{-p}.

Exemple :

On a $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ signifié que $1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq 1415 \times 10^{-3}$

C'est à dire $1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq (1414+1) \times 10^{-3}$.

d'où 1414×10^{-3} est une approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}et $(1414+1) \times 10^{-3}$ est une approximation décimale par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}.

Application :

On considère le nombre suivant : $A = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ sachant que $1,73 \leq \sqrt{3} \leq 1,74$ et $2,64 \leq \sqrt{3} \leq 2,65$

Donner l'approximation décimale par défaut et par excès de A à 10^{-2} prés.