

Ensembles des nombres

I. Définitions et notations

Activité

Cocher les cases convenables

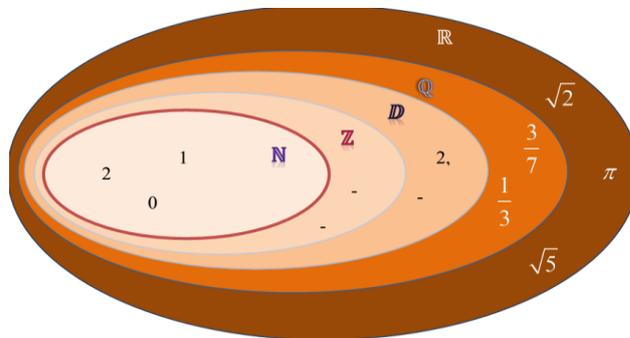
Nombre	$-\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{5}{2}$	13.5	7	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}$	Notation de l'ensemble
Entier naturel							
Entier relatif							
Décimal relatif							
Rationnel							
Réel							

Définitions

- Les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note \mathbb{N} tels que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Les nombres entiers relatifs forment un ensemble qu'on note \mathbb{Z} tels que $\mathbb{Z} = \{\dots -2; -1; 0; 1; 2 \dots\}$
- Les nombres décimaux forment un ensemble qu'on note \mathbb{D} tels que
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$
- Les nombres rationnels constituent un ensemble qu'on note \mathbb{Q} tels que
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$
- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels constituent un ensemble des nombres réels qu'on note \mathbb{R}

Remarque :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Application

Compléter par \in ; \notin ; \subset ; \supset

$15 \dots \mathbb{N}$; $\frac{2\pi}{3} \dots \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \dots \mathbb{Q}$; $\frac{1}{3} \dots \mathbb{R}$; $\frac{2}{7} \dots \mathbb{D}$; $-\sqrt{\frac{12}{3}} \dots \mathbb{Z}$
 $\mathbb{Z} \dots \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \dots \mathbb{N}$; $\mathbb{D} \dots \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \dots \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \dots \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}^*$

II. Opérations dans \mathbb{R}

1) Addition dans \mathbb{R}

Propriétés

Soient $a; b$ et c trois nombres réels ; on a

- $a + b = b + a$ On dit que l'addition est **commutative**.
- $a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) = c + (a + b)$ On dit que l'addition est **associative**.
- $a + 0 = a$ On dit que 0 est un **élément neutre** de l'addition dans \mathbb{R} .
- $a + (-a) = a - a = 0$ On dit que $-a$ est l'**opposé** de a

2) Multiplication dans \mathbb{R}

Propriétés :

Soient $a; b$ et c trois nombres réels ; on a

- $a \times b = b \times a$ On dit que la multiplication est **commutative**.
- $a \times b \times c = a \times (b \times c) = b \times (a \times c) = c \times (a \times b)$ On dit que la multiplication est **associative**.
- $a \times 1 = a$ On dit que 1 est un **élément neutre** de la multiplication dans \mathbb{R} .
- $a \times \frac{1}{a} = 1$ On dit que $\frac{1}{a}$ est l'**inverse** de a

3) Opérations sur les fractions :

Propriétés

Soient a, b, c et d des nombres réels on a

- * $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; ($b \neq 0$ et $d \neq 0$)
- * $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$; ($b \neq 0$ et $d \neq 0$)
- * $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$; ($b \neq 0; c \neq 0$)
- * $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$)
- * $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0, d \neq 0$) ; équivaut à dire que $ad = bc$

Application

1) Calculer et simplifier : $A = \frac{2}{5} - 4 + \frac{7}{3} - \frac{4}{15}$; $B = \left(\frac{2+3}{1-\frac{2}{5}}\right) + \left(\frac{3-2}{1+\frac{3}{4}}\right)$

2) Soient x et y deux nombres non nuls réels tels que : $x + y \neq 0$ et $x - y \neq 0$

Simplifier l'expression suivante : $E = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} - \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+1}$

III. Puissances – Ecriture scientifique – Racines carrées

1) Ecriture scientifique :

Définition :

Soit x un nombre réel décimale et $p \in \mathbb{Z}$

L'écriture $x = a \times 10^p$ s'appelle écriture scientifique de x sachant que

- Si $x < 0$ alors $-10 < a \leq -1$
- Si $x > 0$ alors $1 \leq a < 10$

Exemple :

Le nombre d'Avogadro $N_a = 6023,045 \cdot 10^{20} = 6.02304510^{23}$

La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 300000000 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Application :

a) Donner l'écriture scientifique aux nombres suivants :

2586,5 ; -875,56 ; 0.00095 ; $78786,235 \cdot 10^{-7}$; $13 \times 10^{-5} \times 0.0003$

b) Simplifier les nombres suivants : $A = 5^3 \times 2^2 \times 100 \times 8 \times 25$; $B = \frac{2.4 \times 10^{-3} \times 7.2 \times 10^5}{1.2 \times 10^4 \times 0.9 \times 10^{-2}}$

2) Les puissances :

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels et soient m et n deux entiers relatifs non nuls on a :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; ($a \neq 0$)
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)

Application

1) Simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{(x^2y)^{-3} \times z^2}{xy^2 \times z^{-3}}$; $B = \frac{(x^2y)^{-3} \times x^3z^{-2}}{x(zy)^2 \times y^{-1}}$

2) On considère le nombre suivant : $E = \frac{6^{12} \times 25^{-2}}{15^8 \times 18^2}$

Déterminer les nombres entiers relatifs m et n tels que $E = 2^n \times 5^m$

b) Les racines carrées

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^+$

La racine carrée de a est le nombre réel b qui vérifie l'égalité suivante : $b^2 = a$ et on écrit $b = \sqrt{a}$

Propriété :

Soient $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ on a :

- * $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$
- * $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- * $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$; ($a \neq 0$)
- * $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$; $n \in \mathbb{Z}$ *
- * $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; ($b \neq 0$)
- * $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$

Remarque :

Soit a un nombre réel : si $\begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = a \\ a < 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = -a \end{cases}$

Application :

1) Montrer que $\left(\sqrt{1 + \frac{3}{5}} \times \sqrt{1 - \frac{3}{5}}\right) \in \mathbb{Q}$

2) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; simplifier l'expression suivante : $E = \sqrt{a^3} \times \sqrt{a \times b^2} + \sqrt{\sqrt{(ab)^4} - \sqrt{b} \times \sqrt{a^4 \times b}}$

IV. Identités remarquables :

Activité :

Développer les expressions suivantes : $(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a - b)(a + b)$; $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $(a + b)(a + b)^2$ et $(a - b)(a - b)^2$

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels on a :

* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

* $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

* $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

* $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

* $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Application :

1) Développer puis réduire les expressions suivantes :

$A = (2x - 1)^2 + (x + 2)^3$; $B = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; $C = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$; $D = (2x - 1)^3 - (x + 4)^2$

2) Factoriser les expressions :

$E = x^2 - 4 + (x + 3)(x - 2) - 3(x - 2)^2$; $F = x^3 - 27 + 2(x^2 - 9) - 3x + 9$; $G = 4x^2 - 36x$

$H = x^3 + 1 + 3(x^2 - 1) - x + 1$

