Continuité d'une fonction numérique

Série d'exercices avec correction

Partie 4

Exercice 1 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$a = \sqrt[6]{125} \ ; \ b = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}} \ ; \ c = \frac{\sqrt[3]{20^5} \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}}$$

et $$d = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt[4]{4}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}$$

2) Comparer les nombres $\sqrt[3]{5}$ et $\sqrt[4]{9}$ puis les nombres $\sqrt{7}$ et $\sqrt[5]{20}$

3) Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$$\sqrt{5} \ ; \ \sqrt[3]{7} \ ; \ \sqrt[4]{8} \ ; \ \sqrt[6]{15}$$

4) Eliminer les racines nème du dénominateur des expressions suivantes :

$$A = \frac{6}{\sqrt[5]{4}} \ ; \ B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{\sqrt[3]{10} - 2} + \frac{1}{\sqrt[3]{10} + 2}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(E_1) : x^6 = 8$; $(E_2) : x^5 = 3$

$(E_3) : (x-1)^4 = -2$; $(E_4) : (x-2)^5 = -32$

$(E_5) : x^6 - 6x^3 - 16 = 0$

$(E_6) : \sqrt[3]{(x+1)^2} - 4\sqrt[3]{(x+1)} + 3 = 0$

$(E_7) : \sqrt[3]{6 - 2x} = \sqrt{x - 1}$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{4^+} \dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{2x-8}$

2) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

3) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$

4) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x} - 2x$

5) $\lim\limits_{9} \dfrac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x} - 5}{x - 9}$

6) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 + x^2 + 1}}{\sqrt[3]{2x^2 - x + 3}}$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - 3x$

2) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 3x} - 2x$

3) $\lim\limits_{-\infty} \sqrt[3]{1 - x^3} + 5x$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définit sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2)Verifier que :

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3 + 1 \ ; \ \forall x \in [0; +\infty[$$

En déduire la monotonie de f sur $[0; +\infty[$

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 6 :

f une fonction définie par :

$$f(x) = 3 - \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de f sur $I = [2; +\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I en utilisant la définition de la monotonie

b) Montrer que : g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle J que l'on déterminera

c) Déterminer : $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3) a) Montrer que : l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $2 < \alpha < 3$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de la valeur α d'amplitude 0.5

Continuité d'une fonction numérique

Série d'exercices avec correction

Partie 4

Exercice 1 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$a=\sqrt[6]{125}\quad ;\quad b=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}}\quad ;\quad c=\frac{\sqrt[3]{20^5}\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}}$$

$$\text{et}\qquad d=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt[4]{4}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}$$

2) Comparer les nombres $\sqrt[3]{5}$ et $\sqrt[4]{9}$ puis les nombres $\sqrt{7}$ et $\sqrt[5]{20}$

3) Classer dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt{5}\ ;\ \sqrt[3]{7}\ ;\ \sqrt[4]{8}\ ;\ \sqrt[6]{15}$

4) Eliminer les racines nème du dénominateur des expressions suivantes :

$$A=\frac{6}{\sqrt[5]{4}}\quad ;\quad B=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$C=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}\quad \text{et}\quad D=\frac{1}{\sqrt[3]{10}-2}+\frac{1}{\sqrt[3]{10}+2}$$

Solution de l'exercice 1 :

1) Simplification de $a\ ;\ b\ ;\ c\ et\ d$:

- $a=\sqrt[6]{125}=\sqrt[2\times3]{5^3}=\sqrt[2]{5}=\sqrt{5}$
- $b=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}}=\sqrt[3\times4]{2^6}=\sqrt[2\times6]{2^6}=\sqrt[2]{2}=\sqrt{2}$
- $c=\dfrac{\sqrt[3]{20^5}\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{20^5\times3^2}{15^2\times2^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{(2^2\times5)^5\times3^2}{(3\times5)^2\times2^4}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{2^{10}\times5^5\times3^2}{3^2\times5^2\times2^4}}=\sqrt[3]{2^6\times5^3}=2^2\times5$$

Donc $\boxed{c=20}$

- $d=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt[4]{4}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4\times2]{2^2}}{\sqrt[3\times2]{2^3}\times\sqrt[3\times4]{2^5}}$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}}{\sqrt[2]{2}\times\sqrt[12]{2^5}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{12}}}$$

$$=2^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)}=2^{\left(\frac{4+3-6-5}{12}\right)}$$

$$=2^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Donc $\boxed{d=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

2) Comparer les nombres $\sqrt[3]{5}$ et $\sqrt[4]{9}$ puis les nombres $\sqrt{7}$ et $\sqrt[5]{20}$

- *Le* $ppcm(3\,;4)=12$

$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\times4]{5^4}=\sqrt[12]{625}$

et $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4\times3]{9^3}=\sqrt[12]{972}$

avec $650<972$ *c.a.d* $\sqrt[12]{625}<\sqrt[12]{972}$

donc $\boxed{\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{9}}$

- *Le* $ppcm(2\,;5)=10$

$\sqrt[2]{7}=\sqrt[2\times5]{7^5}=\sqrt[10]{16807}$

et $\sqrt[5]{20}=\sqrt[5\times2]{20^2}=\sqrt[10]{400}$

avec $\sqrt[10]{400}<\sqrt[10]{16807}$

donc $\boxed{\sqrt[5]{20}<\sqrt[2]{7}}$

3) Classer dans l'ordre croissant les nombres $\sqrt{5}\ ;\ \sqrt[3]{7}\ ;\ \sqrt[4]{8}\ ;\ \sqrt[6]{15}$:

Le plus petit multiple commun des nombres 2 ; 3 ; 4 ;6 est 12

$\sqrt[2]{5}=\sqrt[2\times6]{5^6}=\sqrt[12]{15625}$

$\sqrt[3]{7}=\sqrt[3\times4]{7^4}=\sqrt[12]{2401}$

$\sqrt[4]{8}=\sqrt[4\times3]{8^3}=\sqrt[12]{512}$

et $\sqrt[6]{15}=\sqrt[6\times2]{15^2}=\sqrt[12]{225}$

donc $\boxed{\sqrt[6]{15}<\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{7}<\sqrt[2]{5}}$

4) Eliminer les racines nème du dénominateur des expressions suivantes :

Remarque :

Soient a et b deux réels positifs avec $a>b$

- $a-b=\sqrt[3]{(a-b)^3}=\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{(a-b)^2}$
- $a-b=\sqrt[n]{(a-b)^n}=\sqrt[n]{a-b}\times\sqrt[n]{(a-b)^{n-1}}$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$
- $a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

- $A=\dfrac{6}{\sqrt[5]{4}}=\dfrac{\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{4^4}}=\dfrac{\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{4^4}}{4}$

Donc $\boxed{A=\dfrac{\sqrt[5]{4^4}}{4}}$

• $B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$= \frac{3\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = \frac{3\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$

Donc $\boxed{B = \sqrt{5}+\sqrt{2}}$

• $C = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}$

$= \frac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)}$

$= \frac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{(3-2)}$

Donc $\boxed{C = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

• $D = \frac{1}{\sqrt[3]{10}-2} + \frac{1}{\sqrt[3]{10}+2}$

$= \frac{\left(\sqrt[3]{10^2}+2\sqrt[3]{10}+2^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{10}\right)^3-(2)^3\right)} + \frac{\left(\sqrt[3]{10^2}-2\sqrt[3]{10}+2^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{10}\right)^3+(2)^3\right)}$

$= \frac{\left(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4\right)}{10-8} + \frac{\left(\sqrt[3]{100}-2\sqrt[3]{10}+4\right)}{10+8}$

$= \frac{\left(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4\right)}{2} + \frac{\left(\sqrt[3]{100}-2\sqrt[3]{10}+4\right)}{18}$

$= \frac{\left(9\sqrt[3]{100}+18\sqrt[3]{10}+36\right)+\left(\sqrt[3]{100}-2\sqrt[3]{10}+4\right)}{18}$

$= \frac{\left(10\sqrt[3]{100}+16\sqrt[3]{10}+40\right)}{18}$

Donc $\boxed{D = \frac{5\sqrt[3]{100}+8\sqrt[3]{10}+20}{9}}$

Exercice 2 :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(E_1):\ x^6 = 8$; $(E_2):\ x^5 = 3$

$(E_3):(x-1)^4 = -2$; $(E_4):(x-2)^5 = -32$

$(E_5):\ x^6 - 6x^3 - 16 = 0$

$(E_6):\sqrt[3]{(x+1)^2} - 4\sqrt[3]{(x+1)} + 3 = 0$

$(E_7):\sqrt[3]{6-2x} = \sqrt{x-1}$

Solution de l'exercice 2 :

Résolution dans $\mathbb{R}$
de l'équation $x^n = a$ ***avec*** $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $n \in \mathbb{N}^*$ **:**

	Si n *est pair*	*Si* n *est impair*
Si $a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Si $a > 0$	$x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
Si $a < 0$	*Pas de solution dans* $\mathbb{R}$	$x = -\sqrt[n]{\lvert a\rvert}$

1) Résoudre dans IR l'équation (E_1) : $x^6 = 8$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans IR

$(E_1) \Leftrightarrow x^6 = 8$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[6]{8}$ ou $x = -\sqrt[6]{8}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[2\times3]{2^3}$ ou $x = -\sqrt[2\times3]{2^3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[2]{2}$ ou $x = -\sqrt[2]{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Donc $S_1 = \{\sqrt{2}\ ; -\sqrt{2}\}$

2) Résoudre dans IR l'équation (E_2) : $x^5 = 3$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans IR

$(E_2) \Leftrightarrow x^5 = 3$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{3}$

Donc $S_2 = \{\sqrt[5]{3}\}$

3) Résoudre dans IR l'équation (E_3) : $(x-1)^4 = -2$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) dans IR

$(E_3) \Leftrightarrow (x-1)^4 = -2$

Avec $(x-1)^4 \geq 0\ \forall x \in$ IR et $-2 < 0$

Alors : L'équation (E_3) n'admet pas de solution dans IR

Donc $S_3 = \emptyset$

4) Résoudre dans IR l'équation : (E_4) : $(x-2)^5 = -32$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) dans IR

$(E_4) \Leftrightarrow (x-2)^5 = -32$

$\Leftrightarrow x - 2 = -\sqrt[5]{32}$

$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt[5]{2^5} = 2 - 2$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc $S_1 = \{0\}$

5) Résoudre dans IR l'équation : (E_5) : $x^6 - 6x^3 - 16 = 0$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) dans IR

$(E_5) \Leftrightarrow x^6 - 6x^3 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^3\right)^2 - 6x^3 - 16 = 0$

On pose $x^3 = X$

L'équation devient

$$X^2-6X-16=0 \quad (*)$$

On a :

$$\Delta=(-6)^2-4\times1\times(-16)=100>0$$

Donc l'équation (*) admet deux solutiosns

$$\begin{cases} X_1=\frac{6-\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6-10}{2}=-2 \\ X_2=\frac{6+\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6+10}{2}=8 \end{cases}$$

D'où

$(E_5) \Leftrightarrow x^3=8$ ou $x^3=-2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}$ ou $x=-\sqrt[3]{8}$ ou $x=-\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$ ou $x=-\sqrt[3]{2}$

Donc $S_5=\{-2\ ;\ 2\ ;-\sqrt[3]{2}\}$

6) Résoudre dans IR l'équation :

$$(E_6) : \sqrt[3]{(x+1)^2}-4\sqrt[3]{(x+1)}+3=0$$

Soit D_6 le domaine de définitiuon de l'équation (E_6)

et S_6 l'ensemble des solutions de cette équation dans IR

L'équation (E_6) est définit ssi $x+2\geq0$

$x\in D_6 \Leftrightarrow x\geq-1 \Leftrightarrow x\in[-1;+\infty[$

Donc $D_6=[-1;+\infty[$

$(E_6) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1})^2-4\sqrt[3]{x+1}+3=0$

On pose $X=\sqrt[3]{x+1}$

L'équation devient

$$X^2-4X+3=0 \quad (*)$$

On a $\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4>0$

Donc l'équation (*) admet deux solutiosns

$$\begin{cases} X_1=\frac{4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4-2}{2}=1 \\ X_2=\frac{4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4+2}{2}=3 \end{cases}$$

$(E_6) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=1$ *ou* $\sqrt[3]{x+1}=3$

$\Leftrightarrow x+1=1^3$ *ou* $x+2=3^3$

$\Leftrightarrow x=1-1=0$ *ou* $x=27-1=26$

Les deux solutions sont dans $D_6=[-1;+\infty[$

Donc $S_6=\{0\ ;\ 26\}$

7) Résoudre dans IR l'équation

$$(E_7) : \sqrt[3]{6-2x}=\sqrt{x-1}$$

Soit D_7 le domaine de définitiuon de l'équation (E_7)

et S_7 l'ensemble des solutions de cette équation dans IR

L'équation (E_7) est définit

ssi $6-2x\geq0$ *et* $x-1\geq0$

ssi $-2x\geq-6$ *et* $x\geq1$

ssi $x\leq3$ *et* $x\geq1$

ssi $1\leq x\leq3$

$x\in D_6 \Leftrightarrow 1\leq x\leq3 \Leftrightarrow x\in[1;3]$

Donc $D_6=[1;3]$

$(E_7) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6-2x}=\sqrt[2]{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt[6]{(6-2x)^2}=\sqrt[6]{(x-1)^3}$

$\Leftrightarrow (6-2x)^2=(x-1)^3$

$\Leftrightarrow 36-24x+4x^2=x^3-3x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow x^3-7x^2+27x=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-x+7)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-x+7=0$

L'équation $(x^2-x+7=0)$ n'admet pas de solution dans IR

Car $\Delta=(-1)^2-4\times1\times7=-27<0$

D'où

$(E_7) \Leftrightarrow x=0$ et $0\notin D_6=[1;3]$

Donc $S_7=\emptyset$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{4^+} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{2x-8}$ *2)* $\lim\limits_{1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

3) $\lim\limits_{1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$ *4)* $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x}-2x$

5) $\lim\limits_{9} \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x}-5}{x-9}$ 6) $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}}$

Solution de l'exercice 3 :

1) Calculer $\lim\limits_{4^+} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{2x-8}$

$\lim\limits_{4^+} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{2x-8}$

est une forme indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{4^+}\frac{\sqrt[3]{x-4}}{2x-8}=\lim_{4^+}\frac{\sqrt[3]{x-4}\times\sqrt[3]{(x-4)^2}}{(2x-8)\times\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$$=\lim_{4^+}\frac{\sqrt[3]{(x-4)^3}}{(2x-8)\times\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$$=\lim_{4^+}\frac{x-4}{2(x-4)\times\sqrt[3]{(X-4)^2}}$$

$$=\lim_{4^+}\frac{1}{2\sqrt[3]{(X-4)^2}}=+\infty$$

D'où $\boxed{\lim_{4^+}\frac{\sqrt[3]{x-4}}{2x-8}=+\infty}$

2) Calculer $\lim_{1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

$\lim_{1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ **est une forme indetermie** $\left(\frac{0}{o}\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}$$

D'où $\boxed{\lim_{1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}}$

3) Calculer $\lim_{8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}$

$\lim_{1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}$ **s'agit d'une F.I** $\left(\frac{0}{o}\right)$

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{(\sqrt[3]{x})^2-2^2}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{(\sqrt[3]{x}-2)\left[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{(\sqrt[3]{x}+2)}{\left[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

D'où $\boxed{\lim_{8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}=\frac{1}{3}}$

4) Calculer $\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}-2x$

$\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}-2x$ **s'agit d'une F.I** $[(+\infty)-(+\infty)]$

$$\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}-2x=\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}$$

$$\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}-2x=\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}\left(1-2\times\sqrt[3]{x^2}\right)$$

$\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$ *et* $\lim_{+\infty}1-2\sqrt[3]{x^2}=-\infty$

Alors $\boxed{\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x}-2x=-\infty}$

4) Calculer $\lim_{9}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x}-5}{x-9}$

$\lim_{9}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x}-5}{x-9}$ **est une F.I** $\left(\frac{0}{o}\right)$

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x}-5}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2+\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2+\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}+\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

- $$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x-1}-2)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3-2^3}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1-8)}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-9)}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}=\frac{1}{12}$$

- $$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{1}{(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{6}$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x}-5}{x-9}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}}$

6) Calculer $\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}}$

$\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}}$ **est une F.I** $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

- $$\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}}=\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[3\times4]{(x^3+x^2+1)^3}}{\sqrt[3\times4]{(2x^2-x+3)^4}}$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[12]{(x^3)^3}}{\sqrt[12]{(2x^2)^4}}$$

$$=\lim_{+\infty}\sqrt[12]{\frac{x^9}{16\,x^8}}$$

$$=\lim_{+\infty}\sqrt[12]{\frac{x}{16}}=+\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}}=+\infty}$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - 3x$

2) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x} - 2x$

3) $\lim\limits_{-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + 5x$

Solution de l'exercice 4 :

1) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - 3x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty)-(+\infty)]$ avec $\sqrt[3]{1} - 3 \neq 0$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1+3\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}\right)} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \times \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}} - 3\right) = -\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}} - 3 = 1-3 = -2$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - 3x = -\infty$$

2) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x} - 2x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty)-(+\infty)]$ avec $\sqrt[3]{8} - 2 = 0$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x} - 2x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{8x^3+3x}\right)^3 - (2x)^3}{\left[\left(\sqrt[3]{8x^3+3x}\right)^2 + 2x\sqrt[3]{8x^3+3x} + (2x)^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3+3x-8x^3}{\left[x^2\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\left[x^2\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\left[x\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}+4\right]} = 0$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}+4\right] = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x} - 2x = 0$$

3) Calculer $\lim\limits_{-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + 5x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty)+(-\infty)]$

car : $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + 5x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1+(-x)^3} + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-x) \times \sqrt[3]{\frac{1}{(-x)^3}+1} + 5x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-x)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{(-x)^3}+1} - 5\right) = -\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{(-x)^3}+1} - 5 = 1-5 = -4$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + 5x = -\infty$$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définit sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 3\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Verifier que :

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3 + 1 \quad ; \quad \forall x \in [0;+\infty[$$

En déduire la monotonie de f sur $[0;+\infty[$

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution de l'exercice 5 :

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty)-(+\infty)]$

car :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3\sqrt[3]{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt[3]{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 3\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{3\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Verifier que :

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3 + 1 \quad ; \quad \forall x \in [0;+\infty[$$

Soit $[0;+\infty[$

$$\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3 + 1$$
$$= \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 + 3\sqrt[3]{x} - 1 + 1$$
$$= \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 + 3\sqrt[3]{x}$$
$$= \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 + 3\sqrt[3]{x} - 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = f(x)$$

Donc

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3 + 1 \quad ; \forall x \in [0;+\infty[$$

● ***Déduction :***

Soient $x \in [0;+\infty[$ *et* $y \in [0;+\infty[$

$$x < y \Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} - 1 < \sqrt[3]{y} - 1$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3 + 1 < \left(\sqrt[3]{y} - 1\right)^3 + 1$$
$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

D'où

f est strictement croissante sur $I = [0;+\infty[$

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer

f est continue et strictement croissante sur $I = [0;+\infty[$ Donc :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec $J = f(I)$

$$f(I) = f([0;+\infty[\,) = \left[f(0)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$
$$= [\,1\,;+\infty\,[$$

Donc : $J = f(I) = [1\,;+\infty[$

3) Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ *et* $y \in I$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y} - 1\right)^3 + 1 = x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y} - 1\right)^3 = x - 1$$

On a $x \in J$ *donc* $x \geq 1$

Donc $x - 1 \geq 0$

De plus $y \in I = [0;+\infty[$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y} - 1\right)^3 = x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} - 1 = \sqrt[3]{x - 1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$$
$$\Leftrightarrow y = \left(1 + \sqrt[3]{x - 1}\right)^3$$

ainsi $f^{-1}(x) = \left(1 + \sqrt[3]{x - 1}\right)^3 \quad \forall x \in J$

Exercice 6 :

f une fonction définie par :

$$f(x) = 3 - \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

1) Déterminer D_f

et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de f sur $I = [2;+\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I en utilisant la définition de la monotonie

b) Montrer que :

g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle J que l'on déterminera

c) Déterminer : $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3) a) Montrer que :

l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $2 < \alpha < 3$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de la valeur α d'amplitude 0.5

Solution de l'exercice 6 :

1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Soit a un nombre réel avec $a \geq 0$

On sait que :

- $x^2 \geq a \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{a}$ *ou* $x \geq \sqrt{a}$
- $x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

- $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4$

$$\Leftrightarrow x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Donc $D_f =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt[3]{x^2 - 4} = -\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 4 = +\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) Soit g la restriction de f sur $I = [2;+\infty[$
a) Etudier le sens de variations de g sur I en utilisant la définition de la monotonie

Soient $x; y \in [2;+\infty[$ *tel que :* $x < y$

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x^2 - 4 < y^2 - 4$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2-4} < \sqrt[3]{y^2-4}$$
$$\Rightarrow -\sqrt[3]{x^2-4} > -\sqrt[3]{y^2-4}$$
$$\Rightarrow 3 - \sqrt[3]{x^2-4} > 3 - \sqrt[3]{y^2-4}$$
$$\Rightarrow g(x) > g(y)$$

D'où

g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

b) Montrer que : g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle J que l'on déterminera

g est continue et strictement décroissante sur $I = [2;+\infty[$ *Donc :*

g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J avec $J = f(I)$

$$g(I) = f([2;+\infty[\ ) = \left] \lim_{x\to+\infty} f(x) \,;\, f(2) \right] =]-\infty\,;3]$$

Donc : $J = f(I) =]-\infty\,;3]$

c) Déterminer : $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

Soit $x \in J =]-\infty\,;3]$ *et* $y \in I = [2;+\infty[$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$
$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt[3]{y^2-4} = x$$
$$\Leftrightarrow 3 - x = \sqrt[3]{y^2-4}$$

$x \in J =]-\infty\,;3]$ *et* $y \in I = [2;+\infty[$

Donc $3 - x \geq 0$ et $y^2 - 4 \geq 0$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y^2-4} = 3 - x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y^2-4}\right)^3 = (3-x)^3\ ;$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 4 = (3-x)^3$$
$$\Leftrightarrow y^2 = (3-x)^3 + 4$$
$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{(3-x)^3+4}$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(3-x)^3+4}$$

Car $y \in I = [2;+\infty[$ donc $y \geq 0$

D'où :

$$g^{-1}(x) = \sqrt{(3-x)^3+4}\ ;\ \forall x \in]-\infty;3]$$

3) a) Montrer que : l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $2 < \alpha < 3$

$$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

On considére la fonction h définit par

$$h(x) = g(x) - x$$

- *La fonction g est continue sur* $[2;+\infty[$

Et la fonction $x :\longmapsto -x$ *est continue sur* $[2;+\infty[$ *D'où*

la fonction h est continue sur $[2;+\infty[$

- *La fonction g est strictement décroissante sur* $[2;+\infty[$ *et la fonction* $x :\longmapsto -x$ *est est strictement décroissante sur* $[2;+\infty[$

D'où

la fonction h est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

Car c'est une somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[2;+\infty[$

- $h(3) = g(3) - 3 = -\sqrt[3]{5} < 0$
  $h(2) = g(2) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0$

Donc

$$h(3) \times h(2) < 0$$

D'où d'apés T.V.I

l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : 2< $\alpha < 3$

C-à-dire :

l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : 2< $\alpha < 3$

b) Trouver un encadrement de la valeur α d'amplitude 0.5

On a $2 < \alpha < 3$

Le centre de l'intervalle $]2;3[$ *est*

$$c = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$h(c) = h\left(\frac{5}{2}\right) = 3 - \sqrt[3]{9} - \frac{5}{2}\ \frac{1}{2} - \sqrt[3]{9} < 0$$

et $h(2) = 1$

Donc $h\left(\frac{5}{2}\right) \times h(2) < 0$

D'où $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

et l'amplitude de l'encadrement est

$$l = \frac{5}{2} - 2 = 0.5$$