Continuité d'une fonction numérique

Série d'exercices avec correction

Partie 3

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;1]$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$

1) Montrer que : f est strictement décroissante sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;\,1]$
2) Montrons que : f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J que l'on déterminera
3) Montrer que : $f^{-1}(\mathrm{x}) = 3 - \sqrt{x+1}$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{J}$

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I} =]2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

1) Montrer que : g est strictement décroissante sur $\mathrm{I} =]2\,;\,+\infty[$
2) Montrer que : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
3) Calculer $g(4)$ et $g\,(3)$ et en déduire

$$g^{-1}\left(\frac{7}{6}\right) \text{ et } g^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$$

Puis déterminer $g^{-1}\left(\left[\frac{7}{6}\,;\,\frac{5}{3}\right]\right)$

4) Déterminer $g^{-1}(\mathrm{x})$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{J}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définit sur $[0;+\infty[$ par : $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + 6\sqrt{\mathrm{x}} + 1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)}$
Et déterminer la monotonie de f sur $[0;+\infty[$
2) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1}définit sur J que l'on déterminera
3) Déterminer $f^{-1}(\mathrm{x})$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{J}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$
en déduire des variations de f sur $\mathbb{R}$
2) Soit h la restriction de la fonction f sur $\mathrm{I} = [0\,;\,+\infty[$
a) Montrer que : h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
b) Calculer $h(1)$ et $h(2)$
et en déduire $h^{-1}\left(\left[0\,;\,\frac{3}{5}\right]\right)$
c) Montrer que : $h^{-1}(x) \geq 0 \quad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{J}$
d) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{J}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $I = [4;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \mathrm{x}\sqrt{x} - \mathrm{x} + 1$

1) a) Verifier que :
$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2 \;\forall x \in I$$
b) Montrer que : $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)} = -\infty$
2) Montrer que :
$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right) \quad \forall x \in I$$
En deduire que :
f est strictemnt décroissante sur I
3) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $I = [4;+\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{64}{9}\,;\,\frac{121}{16}[$
4) a) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1}définit sur J que l'on déterminera
b) Déterminer $f^{-1}(\mathrm{x})$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{J}$
c) En déduire que : $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

Continuité d'une fonction numérique

Série d'exercices avec correction

Partie 3

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty\,;1]$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$

1) Montrer que : f est strictement décroissante sur $I =]-\infty\,;\,1]$
2) Montrons que : f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
3) Montrer que : $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ pour tout $x \in J$

Solution de l'exercice 1 :

1) Montrer que : f est strictement décroissante sur $I =]-\infty\,;\,1]$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $I =]-\infty\,;1]$

(car f est un polynôme)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x - 6$

le signe de $2x-6$ sur $\mathbb{R}$ est déterminé par

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	--	0	+

Donc

$\forall x \in]-\infty\,;1] : \quad f'(x) = 2x - 6 < 0$

D'où : la fonction f est strictement décroissante sur $I =]-\infty\,;\,1]$

2) Mq : f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera :

f est continue et strictement décroissante sur $I =]-\infty\,;1]$ Donc :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec $J = f(I)$

$$f(I) = f(]-\infty\,;1]) = \left[f(1)\,;\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$$

- $f(1) = 3$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 - 6x + 8 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$$J = f(I) = [3\,;+\infty[$$

3) Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ et $y \in I$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = x$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 - 1 = x$$
$$\Leftrightarrow (y-3)^2 = x + 1$$

On a $x \in J$ donc $x \geq 3$

Donc $x + 1 \geq 1 \geq 0$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow (y-3)^2 = x + 1$$
$$\Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{x+1} \text{ ou } y - 3 = -\sqrt{x+1}$$

Comme $y \in I$ donc $y \leq 1$

Donc $y - 3 \leq -2 \leq 0$

D'où $y - 3 = -\sqrt{x+1}$

c.a .d $y = 3 - \sqrt{x+1}$

ainsi

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1} \quad \forall x \in J$$

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $I =]2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

1) Montrer que : g est strictement décroissante sur $I =]2\,;\,+\infty[$
2) Montrer que : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
3) Calculer $g(4)$ et $g\,(3)$ et en déduire $g^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$ et $g^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$
   Puis déterminer $g^{-1}\left(\left[\frac{7}{6}\,;\,\frac{5}{3}\right]\right)$
4) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution de l'exercice 2 :

1) la monotonie de la fonction g :

La fonction $u : x \longrightarrow \frac{2x-1}{3x-6}$ est dérivable sur $D_u = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(car u est une fonction rationelle)

Donc

g est dérivable sur $]2\,;\,+\infty[$

Pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(\frac{2x-1}{3x-6}\right)'$$
$$= \frac{(2x-1)'\,(3x-6)-(3x-6)'(2x-1)}{(3x-6)^2}$$
$$= \frac{2\,(3x-6)-3(2x-1)}{(3x-6)^2}$$
$$= \frac{6x-12-6x+3}{(3x-6)^2} = \frac{-9}{(3x-6)^2}$$

Donc $\forall x \in]2\,;\,+\infty[$: $g'(x) = \frac{-9}{(3x-6)^2} < 0$

D'où

la fonction g *est strictement décroissante sur* $I =]2\,;\,+\infty[$

2) Mq :g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur J que l'on déterminera :

g *est continue et strictement décroissante sur* $]2\,;\,+\infty[$ *Donc : g admet une fonction réciproque* g^{-1}*définie sur* J

avec $J = g(]2\,;\,+\infty[)$

$$= \left]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;\,\lim_{x\to 2^+} f(x)\right[$$

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{3x-6}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{3x-6} = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1 = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6 = 0^+$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	--	0	+

D'où $g(]2\,;+\infty[) = \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

3) Calculer $g(4)$ et $g(3)$ et déduction de $g^{-1}\left(\left[\frac{7}{6}\,;\,\frac{5}{3}\right]\right)$:

- $g(4) = \frac{2\times4-1}{3\times4-6} = \frac{7}{6}$

et $g(3) = \frac{2\times3-1}{3\times3-6} = \frac{5}{3}$

On sait que : $\forall x \in J$ *et* $\forall y \in I$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

Donc

$$g^{-1}\left(\frac{7}{6}\right) = 4 \ \text{ et } \ g^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 3$$

- *On sait que la monotonie de la fonction* g^{-1} *Sur l'intervalle* J *est la meme monotonie de la fonction* g *sur l'intervalle* I

- *La fonction* g *est continue strictement décroissante sur* $I =]2\,;\,+\infty[$

Donc : La fonction g^{-1} *est continue strictement décroissante sur* $J = \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

En particulier sur $\left[\frac{7}{6}\,;\,\frac{5}{3}\right]$

Donc :

$$g^{-1}\left(\left[\frac{7}{6}\,;\,\frac{5}{3}\right]\right) = \left[g^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)\,;\,g^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]$$

D'où

$$g^{-1}\left(\left[\frac{7}{6}\,;\,\frac{5}{3}\right]\right) = [3\,;\,4]$$

4) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Soit $x \in J$ *et* $y \in I$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{2y-1}{3y-6} = x$$
$$\Leftrightarrow 2y-1 = x(3y-6)$$
$$\Leftrightarrow 2y-1 = 3xy-6x$$
$$\Leftrightarrow 6x-1 = 3xy-2y$$
$$\Leftrightarrow 6x-1 = y(3x-2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x-1}{3x-2} = y$$

D'où $g^{-1}(x) = \frac{6x-1}{3x-2} \quad \forall x \in J$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définit sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 6\sqrt{x} + 1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Et déterminer la monotonie de f sur $[0;+\infty[$

2) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1}définit sur J que l'on déterminera

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution de l'exercice 3 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et monotonie de f sur $[0;+\infty[$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 6\sqrt{x} + 1 = +\infty$
- *Soient* $x \in [0;+\infty[$ *et* $y \in [0;+\infty[$

$$x < y \Rightarrow x < y \text{ et } 6\sqrt{x} < 6\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow x + 6\sqrt{x} < y + 6\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow x + 6\sqrt{x} < y + 6\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow x + 6\sqrt{x} + 1 < y + 6\sqrt{y} + 1$$
$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

D'où

f est strictement croissante sur $I[0;+\infty[$

Autrement :

f *est dérivable sur* $I =]0\,;\,+\infty[$

et $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$ *:* $f'(x) = 1 + 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$ *:* $f'(x) = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}} > 0$

D'où

la fonction f *est strictement cr oissante sur* $I = [0\,;\,+\infty[$

2) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J que l'on déterminera

f *est continue et strictement croissante sur* $I = [0;+\infty[$ *Donc :*

f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* J *avec* $J = f(I)$

$$f(I) = f([0;+\infty[\,) = \left[f(0)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [\,1\,;+\infty\,[$$

Donc : $J = f(I) = [1\,;+\infty[$

3) Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ *et* $y \in I$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow y + 6\sqrt{y} + 1 = x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}^2 + 2\times 3\times\sqrt{y} + 9 - 8 = x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + 3\right)^2 = x + 8$$

On a $x \in J$ *donc* $x \geq 1$

Donc $x + 8 \geq 9 \geq 0$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + 3\right)^2 = x + 8$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - 3 = \sqrt{x+8} \;\; ou \;\; \sqrt{y} - 3 = -\sqrt{x+8}$$

Et comme $y \in I = [0;+\infty[$ *et* $\sqrt{y} \geq 0$

Aors $\sqrt{y} + 3 \geq 3 \geq 0$

De plus $x + 8 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x+8} \geq 3$

$\Leftrightarrow -3 + \sqrt{x+8} \geq 0$

Donc

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{y} + 3 = \sqrt{x+8}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = -3 + \sqrt{x+8}$$
$$\Leftrightarrow y = \left(-3 + \sqrt{x+8}\right)^2$$

ainsi $f^{-1}(x) = \left(-3 + \sqrt{x+8}\right)^2 \;\; \forall x \in J$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en déduire des variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Soit h la restriction de la fonction f sur $I = [0\,;\,+\infty[$

a) Montrer que : h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Calculer $h(1)$ et $h(2)$ et en déduire $h^{-1}\left(\left[0\,;\,\frac{3}{5}\right]\right)$

c) Montrer que : $h^{-1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in J$

d) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution de l'exercice 4 :

1) Les variations de f sur $\mathbb{R}$:

La fonction $f: x \longrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}$ *est dérivable sur* $D_f = \mathbb{R}$

(car f est une fonction rationelle)

Donc

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$$
$$= \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Donc le signe de $f'(x)$ *est le signe de* $4x$

c.à.d $f'(x) \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

- $f(0) = -1$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

D'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		--	0	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2) Soit h la restriction de la fonction f sur $I = [0\ ;\ +\infty[$

a) Montrer que : h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

- ***h est continue sur $I = [0;+\infty[$ (Restriction d'une fonction rationnelle f)***
- ***h et strictement croissante sur $I = [0;+\infty[$ (d'après les variations de f)***

Donc :

h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J avec $J = f(I)$

$$h(I) = f([0;+\infty[\ ) = \left[f(0)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-1\ ;1\ [$$

Donc : $J = h(I) = [-1\ ;1[$

b) Calculer $h(1)$ et $h(2)$ et en déduire $h^{-1}\left(\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]\right)$

- $h(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

et $h(2) = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$

On sait que : $\forall x \in J$ et $\forall y \in I$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

Donc $h^{-1}(\ 0\ ) = 1$ *et* $h^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 2$

- ***On sait que la monotonie de la foncion h^{-1} sur l'intervalle $J = [-1;1[$ est la même monotonie de la fonction h sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$***

Et comme h est continue et strictement croissante sur $I = [0;+\infty[$

Alors

la fonction h^{-1} est continue et strictement croissante sur $J= [-1;1[$

et en particulier sur $\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]$

Donc: $h^{-1}\left(\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]\ \right) = \left[h^{-1}(0\ )\ ;\ h^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$

D'où $g^{-1}\left(\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]\ \right) = [\ 1\ ;\ 2]$

c) Montrer que : $h^{-1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in J$

la fonction h^{-1} est strictement croissante sur $J= [-1;1[$

Donc $\forall x \in [-1;1[$

$$x \geq -1 \Rightarrow h^{-1}(x) \geq h^{-1}(-1)$$
$$\Rightarrow h^{-1}(x) \geq 0$$

D'où $h^{-1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in J$

3) Déterminons $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ et $y \in I$

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2-1}{y^2+1} = x$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = x(y^2 + 1)$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = xy^2 + x$$
$$\Leftrightarrow y^2 - xy^2 = 1 + x$$
$$\Leftrightarrow y^2(1 - x) = 1 + x$$
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

Et comme $x \in J = [-1;1[$

Aors $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ ***et*** $1 - x \neq 0$

Donc

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y^2 = \frac{1+x}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ \text{ ou } \ y = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (\text{ car : } y \geq 0\ )$$

Ainsi $h^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \forall x \in J$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $I = [4;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{x} - x + 1$

1) a) Verifier que :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2 \quad \forall x \in I$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) Montrer que :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right) \quad \forall x \in I$$

Deduire que : f est strictemnt décroissante sur I

3) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $I = [4;+\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{64}{9}\ ;\ \frac{121}{16}[$

4) a) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1}définit sur J à déterminer

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

c) En déduire que : $\propto = 4 + 2\sqrt{3}$

Solution de l'exercice 4 :

1) a) Verification et calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

- ***Soit*** $x \in [4;+\infty[$

$$1 - \frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\left(x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{x} - x = f(x)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{x}\right)^2$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-2\sqrt{x}\right)^2 = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) Montrer que :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) \quad \forall x \in I$$

- *Soit* $x \in [4;+\infty[$

$$f'(x) = \left(1-\frac{1}{4}(x-2\sqrt{x})^2\right)'$$
$$= -2\frac{1}{4}\left((x-2\sqrt{x})\right)'(x-2\sqrt{x})$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\times\sqrt{x}\times(\sqrt{x}-2)$$
$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

Donc $f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) \quad \forall x \in I$

- **Déduction :**

Le signe $f'(x)$ sur $[4;+\infty[$ est le signe oposé de $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$

$\forall x \in [4;+\infty[\ x \geq 4 \ et \ x > 1$

Donc

$\forall x \in [4;+\infty[\ \sqrt{x}-2 \geq 0 \ et \ \sqrt{x}-1 > 0$

D'où

$\forall x \in [4;+\infty[\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) \geq 0$

Ainsi $\forall x \in [4;+\infty[\ f'(x) \leq 0$

(f' s'annule en un seule point sur $[4;+\infty[$)

Donc

f est strictemnt décroissante sur $[4;+\infty[$

3) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $I = [4;+\infty[$ et que $\alpha \in \left]\frac{64}{9} ; \frac{121}{16}\right[$

- On a $f(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right) + x\sqrt{x}$

f est continue sur $[4;+\infty[$

(*comme some de deux fonctions continues* $u: x \to -\frac{1}{4}x^2 - x + 1$ *et* $v: x \to x\sqrt{x}$)

- f est continue et strictement décroissante sur $[4;+\infty[$ Donc :

$$f([4;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x) ; f(4)\right]$$
$$=]-\infty;1]$$

Alors $0 \in f([4;+\infty[)$

f est continue et strictement croissantesur $[4;+\infty[$ et $0 \in f([4;+\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[4;+\infty[$

- *Vérifions que :* $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[4;+\infty[$

avec $f\left(\frac{121}{16}\right) < 0$ *et* $f\left(\frac{64}{9}\right) > 0$

donc $f\left(\frac{121}{16}\right) \times f\left(\frac{64}{9}\right) < 0$

D'ou d'aprés le T.V.I $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$

4) a) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1}définit sur J à déterminer

f est continue et strictement décroissante sur $I = [4;+\infty[$

Donc : f admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur J

Avec $J = g([4;+\infty[) =]-\infty;1]$

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Soit $x \in J =]-\infty;1]$ *et* $y \in I = [4;+\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}\left(y-2\sqrt{y}\right)^2 = x$$
$$\Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{4}\left(y-2\sqrt{y}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 4(1-x) = \left(y-2\sqrt{y}\right)^2$$

On a $x \in J$ *donc* $x \leq 1$ *donc* $4(1-x) \geq 0$

$f^{-1}(x) = y$

$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} = \sqrt{4(1-x)}$ *ou* $y - 2\sqrt{y} = -\sqrt{4(1-x)}$

$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} = 2\sqrt{(1-x)}$ *car* $y - 2\sqrt{y} \geq 0$

$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} + 1 = 1 + 2\sqrt{(1-x)}$

$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} + 1 = 1 + 2\sqrt{(1-x)}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)^2 = 1 + 2\sqrt{(1-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} - 1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{(1-x)}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{(1-x)}}$

$\Leftrightarrow y = \left(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{(1-x)}}\right)^2$

ainsi $f^{-1}(x) = \left(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{(1-x)}}\right)^2 \quad \forall x \in J$

c) En déduire que : $\propto = 4 + 2\sqrt{3}$

On a : $f^{-1}(x) = \left(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{(1-x)}}\right)^2 \quad \forall x \in J$

$f(\propto) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = \propto$

Donc $\propto = \left(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{(1-0)}}\right)^2 = (1+\sqrt{3})^2$

D'où $\propto = 4 + 2\sqrt{3}$