Continuité d'une fonction numérique

Série d'exercices avec correction

Partie 2

Exercice 1 :

Soit f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par son tableau de variation suivant :

x	- 1	3	6	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	0 ↗	4 ↘	1

Déterminer $f(]-1;3])$; $f([3;6])$; $f([6;+\infty[)$

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

1) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

2) Déterminer les variations de la fonction f

3) Déterminer les images des intervalles $[0\,;1]$; $]-\infty\,;0]$; $[1\,;+\infty[$ par la fonction f

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

1) Déterminer les variations de la fonction f

2) En déduire les images des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$ par la fonction f

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie et continue sur $[-2\,;5\,]$ par son tableau de variation suivant :

x	-1	0	3	5
f(x)	-1 ↗	4 ↘	1 ↗	3

1) Montrer que : l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $]3;5[$ et que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement trois solutions dans $]-1\,;5[$

2) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]-1;0[$ et que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-1\,;5[$

Exercice 5 :

1) Montrons que : l'équation $E_1 : x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$ possède au moins une solution dans $]1;2[$

2) Montrons que : l'équation $E_2 :\ x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution dans $]0;1[$

3) Montrer que : l'équation $E_3 :\ \cos(x) = \frac{\pi}{3} - x$ admet une unique solution dans $\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right[$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 5$$

1) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]0;2[$

2) Etudier le singe de la fonction f sur $\mathbb{R}$

3) Par la méthode de dichotomie ; donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{2}{3}$$

1) Déterminer le tableau des variations de la fonction f

2) Déterminer l'image des intervalles $]-\infty\,;1]$; $]1\,;3[$; $[3\,;+\infty[$ par la fonction f

3) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 :

Soit f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par son tableau de variation suivant :

x	-1		3		6		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	1

Déterminer $f(]-1;3])$; $f([3;6])$; $f([6;+\infty[)$

Solution de l'exercice 1 :

- f est continue et strictement décroissante sur $]-1\,;3]$ Donc :

$$f(]-1\,;3]) = \left[f(3)\,;\lim_{x\to-1^+} f(x)\right[$$

$$f(]-1\,;3]) = [0\,;+\infty[$$

- f est continue et strictement croissante sur $[3\,;6]$ Donc :

$$f([3\,;6]) = [f(3)\,;f(6)]$$

$$f([3\,;6]) = [0\,;4]$$

- f est continue et strictement décroissante sur $[6;+\infty[$ Donc :

$$f([6;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;f(6)\right]$$

$$f([6;+\infty[) =]1\,;4]$$

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

1) Calculer : $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{-\infty} f(x)$

2) Déterminer les variations de la fonction f

3) Déterminer l'image des intervalles $[0\,;1]$ $]-\infty\,;0]$; $[1\,;+\infty[$ par la fonction f

Solution de l'exercice 2 :

1) Calculons : $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{-\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 3x^2 + 1$
$= \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 3x^2 + 1$
$= \lim_{x\to-\infty} 2\,x^3 = -\infty$

2) Continuité de g en 2 :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(car f est un polynôme)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 6x^2 - 6x$

Déterminons le signe de $f'(x)$

On a $6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow 6x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow 6x = 0 \;\; ou \;\; x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	--	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

3) Déterminons l'image des intervalles $[0\,;1]$; $]-\infty\,;0]$; $[1\,;+\infty[$ par la fonction f

- f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ Donc :

$$f(]-\infty\,;0]) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;f(0)\right]$$

$$f(]-\infty\,;0]) =]-\infty\,;1]$$

- f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;1]$ Donc :

$$f([0\,;1]) = [f(1)\,;f(0)]$$

$$f([0\,;1]) = [0\,;1]$$

- f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ Donc :

$$f([1\,;+\infty[) = \left[f(1)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$f([1;+\infty[) = [0\,;+\infty[$$

Exercice 3 :

f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

1) Déterminer les variations de la fonction f

2) Déterminer l'image des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$ par la fonction f

Solution de l'exercice 3 :

1) les variations de la fonction f :

On a $D_f = \{x \in : \; 3x - 6 \neq 0\}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(car f est une fonction rationelle)

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-1}{3x-6}\right)'$$
$$= \frac{(2x-1)'(3x-6)-(3x-6)'(2x-1)}{(3x-6)^2}$$
$$= \frac{2(3x-6)-3(2x-1)}{(3x-6)^2}$$
$$= \frac{6x-12-6x+3}{(3x-6)^2} = \frac{-9}{(3x-6)^2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: $f'(x) = \frac{-9}{(3x-6)^2} < 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	--	||	--
$f(x)$	↘	||	↘

2) Déduction :

- f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;2[$ Donc :

$$f(]-\infty\,;2[) = \left]\lim_{x\to 2^-} f(x)\,;\lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$$

Avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{3x-6}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{3x-6} = -\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-1 = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6 = 0^-$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	--	0	+

D'ou $f(]-\infty\,;2[) = \left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right[$

- f est continue et strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$ Donc :

$$f(]2\,;+\infty[) = \left]\lim_{x\to +\infty} f(x)\,;\lim_{x\to 2^+} f(x)\right[$$

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{3x-6}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{3x-6} = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1 = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6 = 0^+$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	--	0	+

D'ou $f(]2\,;+\infty[) = \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie et continue sur $[-2\,;5\,]$ par son tableau de variation suivant :

x	-1	0	3	5
$f(x)$	-1 ↗	4 ↘	1 ↗	3

1) Montrer que : l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $]3;5[$ et que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement trois solutions dans $]-1\,;5[$

2) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]-1;0[$ et que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-1\,;5[$

Solution de l'exercice 4 :

Rappel :

> Soit f une fonction continue sur *un intervalle* $[a\,;b]$
> *Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$;*
> *il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que : $f(c) = k$*
> *(c.à.d : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$)*
> - *Si f est strictement monotone sur $[a\,;b]$ Alors c est unique*

1) Montrer que : l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $]3;5[$ et que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement trois solutions dans $]-1\,;5[$

- f est continue et strictement croissante sur $]3;5[$

et $1 < 2 < 3 \iff f(3) < 2 < f(5)$

c.a.d (2 *est compris strictement entre $f(3)$ et $f(5)$*)

Donc : l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $]3;5[$ ❶

- f est continue et strictement décroissante sur $]0;3[$

et $1 < 2 < 4 \iff f(3) < 2 < f(0)$

c.a.d (2 *est compris strictement entre $f(0)$ et $f(3)$*)

Donc : l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution β dans $]0;3[$ ❷

- f est continue et strictement croissante sur $]-1;0[$

et $-1 < 2 < 4 \iff f(-1) < 2 < f(0)$

c.a.d (2 *est compris strictement entre $f(-1)$ et $f(0)$*)

Donc : l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution γ dans $]-1;0[$ ❸

De ❶ ; ❷ et ❸ on déduit que
l'équation $f(x) = 2$
admet exactement trois solutions α ; β et γ dans $]-1; 5[$

2) Montrer que : l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $]-1; 0[$ et que est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-1; 5[$

- f est continue et strictement croissante sur $[-1 ; 0]$
  de plus $f(-1) = -1$ et $f(0) = 4$
  donc $f(-1) \times f(0) < 0$

D'ou d'aprés le T.V.I **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1; 0[$** ①

- f est strictement décroissante sur $[0 ; 3]$
  et strictement croissante sur $[3 ; 5]$
  donc
  $f(3) = 1$ est la valeur minimale de f sur $[3 ; 5]$
  c.a.d $\forall x \in [3 ; 5]$: $f(x) \geq 1$
  alors f ne s'annule pas sur l'intervalle $[3 ; 5]$

Donc : l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[3 ; 5]$ ②

D'aprés ① et ②
l'équation $f(x) = 0$
admet une seule solution α dans $]-1; 5[$

Exercice 5 :

1) Montrons que :
l'équation E_1: $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$ possède au moins une solution dans $]1; 2[$
2) Montrons que :
l'équation E_2: $x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution dans $]0; 1[$
3) Montrer que :
l'équation E_3: $\cos(x) = \frac{\pi}{3} - x$ admet une unique solution dans $\left]0 ; \frac{\pi}{3}\right[$

Solution de l'exercice 4 :

1) Mq :l'équation E_1: $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$ possède au moins une solution dans $]1; 2[$

On pose : pour tout $x \in IR$
$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$$
l'équation devient $f(x) = 0$

f est continue sur IR (polynome)
Donc f est continue sur $[0; 2]$

De plus on a :
$f(0) = -5$ et $f(2) = 3$
Donc $f(0) \times f(2) < 0$
D'après TVI l'equation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0; 2]$

2) Mq : l'équation E_2: $x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution dans $]0; 1[$

$x^5 + x^3 = 1 - x \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x - 1 = 0$
On pose : pour tout $x \in IR$
$$g(x) = x^5 + x^3 + x - 1$$
l'équation devient $g(x) = 0$

- g est continue sur IR (polynome)
  Donc g est continue sur $[0; 1]$
- g est dérivable sur IR ;
  En particulier dérivable sur $[0 ; 1]$
  et pour tout $x \in [0 ; 1]$ on a :
  $$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$
  Donc g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$
- De plus on a : $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$
  Donc $g(0) \times g(1) < 0$

D'après TVI
l'equation $g(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0; 2]$

3) Mq : l'équation E_3: $\cos(x) = \frac{\pi}{3} - x$ admet une unique solution dans $\left]0 ; \frac{\pi}{3}\right[$

$\cos(x) = \frac{\pi}{3} - x \Leftrightarrow \cos(x) + x - \frac{\pi}{3} = 0$
On pose : $\forall x \in IR$ $h(x) = \cos(x) + x - \frac{\pi}{3}$
l'équation devient $h(x) = 0$

- h est continue sur IR
  (somme de deux fonctions cuntinue sur IR)
  Donc h est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
- h est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$;
  et pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ on a :
  $$h'(x) = -\sin x + 1 = 1 - \sin x > 0$$
  Donc h est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$
- De plus on a :
  $h(0) = 1 - \frac{\pi}{3} < 0$ et $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
  Donc $h(0) \times h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$

D'après TVI
l'equation $h(x) = 0$
admet une solution unique α dans $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 5$$

1) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]0;2[$

2) Etudier le singe de la fonction f sur $\mathbb{R}$

3) Par la méthode de dichotomie ; donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

Solution de l'exercice 6 :

1) Mq : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]0;2[$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

- f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ Donc : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[)$

$$= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$=]-\infty;+\infty[$$

Alors $0 \in f(\mathbb{R})$

- **f est continue et strictement croissante su $\mathbb{R}$ et $0 \in f(\mathbb{R})$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$**

- Vérifions que : $-1 < \alpha < 1$

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et $f(-1) = -9$ et $f(1) = 1$

donc $f(-1) \times f(1) < 0$

D'ou d'aprés le T.V.I $-1 < \alpha < 1$

2) Etudier le singe de f sur $\mathbb{R}$

On sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

- Soit $x \in [\alpha;+\infty[$

$x \geq \alpha$ et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Et $f(\alpha) = 0$ Donc $f(x) \geq 0$

- Soit $x \in]-\infty;\alpha]$

$x \leq \alpha$ et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x) \leq f(\alpha)$

Et $f(\alpha) = 0$ Donc $f(x) \leq 0$

D 'ou

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α avec $-1 < \alpha < 1$

- On a le centre de l'intervalle $]-1;1[$ est $c = \frac{-1+1}{2} = 0$

et on a : $f(c) = f(0) = -4$ avec $f(1) = 1$

donc $f(0) \times f(1) < 0$

D'ou $0 < \alpha < 1$

et on a l'amplitude de l' **encadrement est :**

$l = 1 - 0 = 1$

- On a le centre de l'intervalle $]0;1[$ est $c' = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

et on a $f(c') = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{32}$ avec $f(0) = -4$

donc $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D'ou $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

et on a l'amplitude de l' **encadrement est :**

$l = \frac{1}{2} - 0 = 0,5$

D'où la précision souhaitée est obtenue

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{2}{3}$$

1) Déterminer le tableau des variations de la fonction f

2) Déterminer l'image des intervalles $]-\infty;1]$; $]1;3[$; $[3;+\infty[$ par la fonction f

3) Montrer que :

l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 6 :

1) Tableau des variations de la fonction f :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(car f est un polynôme)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Déterminons le signe de $f'(x)$

On a $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 > 0$

Donc l'équation $2x^2 - 8x + 6 = 0$ admet deux solution dans $\mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{16}}{2\times2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+\sqrt{16}}{2\times2} = 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2x^2 - 8x + 6$		+	0	--	0	+	

De plus $f(1)=\frac{2}{3}-4+6-\frac{2}{3}=\ 2$

$$f(3)=\frac{54}{3}-36+12-\frac{2}{3}=\frac{-20}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x^3=+\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^3=-\infty$$

Donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{-20}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Déterminons l'image des intervalles $]-\infty\,;1]\,;\,]1\,;3[\,;\,[3\,;\,+\infty[$ par la fonction f

- **f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ Donc :**

$$f(]-\infty\,;1])=\left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;f(1)\right]$$

$$f(]-\infty\,;1])=]-\infty\,;2]$$

- **f est continue et strictement décroissante sur $[1\,;3]$ Donc :**

$$f([1\,;3])=[f(3)\,;f(1)]$$

$$f([1\,;3])=\left[\frac{-20}{3}\,;2\right]$$

- **f est continue et strictement croissante sur $[3;+\infty[$ Donc :**

$$f([3;+\infty[)=\left[f(3);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$f([3\,;+\infty[)=\left[\frac{-20}{3}\,;+\infty\right[$$

3) Montrons que : l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

soit $\mathbb{R}=]-\infty\,;1[\,\cup\,[1\,;3]\,\cup\,]3\,;+\infty[$

- f est fonction continue et strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$

Avec $f(]3\,;+\infty[)=\left[\frac{-20}{3}\,;+\infty\right[$
$=\left]\frac{-20}{3}\,;+\infty\right[$

Donc $0\in f\big(f(]3\,;+\infty[)\big)$

Alors : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]3\,;+\infty[$ ❶

- f est fonction continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$

Avec $f(]-\infty\,;1[)=\left]\lim_{x\to-\infty}\,;\,\lim_{x\to1^-} f(x)\right[$
$=]-\infty\,;2[$

Donc $0\in f(]-\infty\,;1[)$

Alors : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans $]-\infty\,;1[$ ❷

- f est continue et strictement croissante sur $[1\,;3]$

de plus $f(1)=\ 2$ et $f(3)=\frac{-20}{3}$

donc $f(1)\times f(3)<0$

D'ou d'aprés le T.V.I
l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution γ dans $]-1;0[$ ❸

De ❶ ; ❷ et ❸ on déduit que

l'équation $f(x)=0$
admet exactement trois solutions α ; β et γ
dans $]-\infty;+\infty[\,=\mathbb{R}$

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………