Continuité
d'une fonction numérique

Série d'exercices avec correction
Partie 1

Exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} \; ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $a = 2$.

2) Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \; ; \quad x \neq 4 \\ g(4) = 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de g en $a = 4$.

3) Soit la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x+\tan x}{x+\sin x} \; ; \quad x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité d e h en $a = 0$.

Exercice 2 :

Etudier la continuité au point 2 *des deux fonctions* f *et* g *définies par :*

1) $$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \; ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} g(x) = \frac{x^3-8}{|x-2|} \; ; \quad x \neq 2 \\ g(2) = 12 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Etudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

1) $$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x^2}{x-1} & x > 1 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1 & x \leq 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

2) $$\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(2x)}{16\,x} & x > 0 \\ g(0) = \frac{1}{8} & \\ g(x) = \frac{2-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & x < 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$

Exercice 4 :

Soient a et b deux réels .

1) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{ax+3}{x^2+1} \; ; \; x < 2 \\ g(2) = 1 \\ g(x) = x^2 - 2bx + a \; ; \; x > 2 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que g soit continue en 2

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x+b}{x^2+1} \; ; \; x < 1 \\ f(1) = a \\ f(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} \; ; \; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

Exercice 5 :

1) Mq la fonction $f: x \to \cos(x) + x^3 + x^2$ est continue sur $[1;5]$

2) Mq la fonction $g: x \to \frac{x+1}{x^3+3} + \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$

3) Mq la fonction $h: x \to \sqrt{\frac{x^2-2x}{2x+1}}$ est continue sur $[2;+\infty[$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2+2} \; ; \; x < 2 \\ f(2) = 1 \\ f(x) = \frac{6\sqrt{x^2+12}-24}{x^2-2x} \; ; \; x > 2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f au point 2

2) En déduire que : f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{f(x)} = \frac{x^2-3x+2}{x-2} \ ; \quad x \neq 2 \\ \mathbf{f(2)} = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $a = 2$.

2) Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \quad ; \ x \neq 4 \\ g(4) = 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de g en $a = 4$.

3) Soit la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x+\tan x}{x+\sin x} \quad ; \ x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité d e h en $a = 0$.

Solution de l'exercice 1 :

1) Continuité de f en a = 2 .

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)\,(x-1)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to2} (x-1) = 1 \ = f(2)$$

Donc $\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en $a = 2$

2) Continuité de g en a = 2 .

$$\lim_{x\to4} g(x) = \lim_{x\to4} \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{(x\sqrt{x}-8)(x\sqrt{x}+8)}{(x-4)\,(x\sqrt{x}+8)}$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{(x\sqrt{x})^2-64}{(x-4)\ (x\sqrt{x}+8)}$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{(x)^3-4^3}{(x-4)\ (x\sqrt{x}+8)}$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x^2+4x+4^2)}{(x-4)\ (x\sqrt{x}+8)}$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{(x^2+4x+4^2)}{(x\sqrt{x}+8)}$$
$$= \frac{16+16+16}{16} \ = 3 = g(4)$$

Donc $\lim\limits_{x\to4} g(x) = g(4)$

D'où g est continue en $a = 4$

3). Continuité de h en a = 0 .

$$\lim_{x\to0} h(x) = \lim_{x\to0} \frac{x+\tan x}{x+\sin x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{x\left(1+\frac{\tan x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\left(1+\frac{\tan x}{x}\right)}{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}$$
$$= \frac{1+1}{1+1} = 1 = h(0)$$

Donc $\lim\limits_{x\to2} h(x) = h(0)$

D'où h est continue en $a = 0$

Exercice 2 :

Etudier la continuité au point 2 des deux fonctions f et g définies par :

1) $$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \quad ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} g(x) = \frac{x^3-8}{|x-2|} \quad ; \quad x \neq 2 \\ g(2) = 12 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 2 :

1) Continuité de f en 2 :

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-1)\,(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{x+7})^2-3^2}{(x-2)\,(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{1}{(\sqrt{x+7}+3)} \ = \frac{1}{6}$$

Donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en 2

2) Continuité de g en 2 :

On a : $|x-2| = \begin{cases} x-2 \quad ; si \ \ x > 2 \\ -(x-2) \ ; si \ \ x \leq 2 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{|x-2|}$
$= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{x-2}$
$= \lim\limits_{x\to 2^+} x^2+2x+2^2 = 12$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$

D'où g est continue à droite de 2 ①

- $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{|x-2|}$
$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{-(x-2)}$
$= \lim\limits_{x\to 2^-} -(x^2+2x+2^2) = -12$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) \neq g(2)$

D'où g n'est pas continue à gauche de 2 ②

Conclusion : De ① et ② on déduit que g est discontinue en 2

Exercice 3 :

Etudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{1-x^2}{x-1} & x > 1 \\ f(x) = x^2-4x+1 & x \leq 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1$

2) $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(2x)}{16x} & x > 0 \\ g(0) = \frac{1}{8} & \\ g(x) = \frac{2-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & x < 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$

Solution de l'exercice 3 :

1). Continuité de f en $x_0 = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2-4x+1$
$= 1-4+1 = -2 = f(1)$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ ①

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1-x^2}{x-1}$
$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1}$
$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)(1+x)}{x-1}$
$= \lim\limits_{x\to 1^+} -(1+x) = -2 = f(1)$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ ②

De ① et ② on déduit que :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

D'où f est continue en $x_0 = 1$

2). Continuité de g en $x_0 = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{16x}$
$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{1}{8}$
$= 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = g(0)$

Car : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ ①

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(2-\sqrt{3+\cos x})(2+\sqrt{3+\cos x})}{x^2\ (2+\sqrt{3+\cos x})}$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2^2-\left(\sqrt{3+\cos x}\right)^2}{x^2\ \left(2+\sqrt{3+\cos x}\right)}$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4-(3+\cos x)}{x^2\ (2+\sqrt{3+\cos x})}$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2\ \left(2+\sqrt{3+\cos x}\right)}$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \times \frac{1}{\left(2+\sqrt{3+\cos x}\right)}$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2+\sqrt{3+1})} = \frac{1}{8} = g(0)$

Car : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$ ②

De ① et ② on déduit que :

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$

D'où g est continue en $x_0 = 0$

Exercice 4 : **Soient a et b deux réels .**

3) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} g(x) = \frac{ax+3}{x^2+1} & ;\ x < 2 \\ g(2) = 1 & \\ g(x) = x^2-2bx+a & ;\ x > 2 \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que g soit continue en 2

4) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x+b}{x^2+1} & ;\ x < 1 \\ f(1) = a & \\ f(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} & ;\ x > 1 \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

Solution de l'exercice 4 :

1). Déterminons a et b pour que g soit continue en 2 :

- $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{ax+3}{x^2+1}$
$= \frac{2a+3}{2^2+1} = \frac{2a+3}{5}$

Donc $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = \frac{2a+3}{5}$

- $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to2^+} x^2 - 2bx + a$
$= 2^2 - 2b \times 2 + a$
$= 4 - 4b + a$

Donc $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = 4 - 4b + a$

g est continue en 2

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2^-} g(x) = g(2)$ *et* $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = g(2)$

$\Leftrightarrow \frac{2a+3}{5} = 1$ *et* $4 - 4b + a = 1$

$\Leftrightarrow \frac{2a+3}{5} = 1$ *et* $4 - 4b + a = 1$

$\Leftrightarrow 2a + 3 = 5$ *et* $-4b = -3 - a$

$\Leftrightarrow 2a = 2$ *et* $4b = 3 + a$

$\Leftrightarrow a = 1$ *et* $b = 1$

D'où

g **est continue en 2** $\Leftrightarrow (a = 1 \text{ et } b = 1)$

2). Déterminons a et b pour que f soit continue en 1 :

- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+x+b}{x^2+1}$
$= \frac{1^2+1+b}{1^2+1} = \frac{2+b}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{2+b}{2}$

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(x\sqrt{x}-1)(x\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x\sqrt{x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(x)^3-1^3}{(x-1)(x\sqrt{x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x\sqrt{x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(x^2+x+1)}{(x\sqrt{x}+1)} = \frac{3}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{3}{2}$

f est continue en

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ *et* $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \frac{2+b}{2} = a$ *et* $\frac{3}{2} = a$

$\Leftrightarrow b = 1$ *et* $a = \frac{3}{2}$

f **est continue en 2** $\Leftrightarrow (a = \frac{3}{2} \text{ et } b = 1)$

Exercice 5 :

4) Mq : la fonction $f: x \to \cos(x) + x^3 + x^2$ est continue sur $[1;5]$

5) Mq : la fonction $g: x \to \frac{x+1}{x^3+3} + \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$

6) Mq : la fonction $h: x \to \frac{\sqrt{x^2-2x}}{2x+1}$ est continue sur $[2;+\infty[$

Solution de l'exercice 5 :

1) Mq : la fonction $f: x \to 2\cos(x) + x^3 + x^2$ est continue sur $[1;5]$:

- On sait que la fonction $u: x \to \cos(x)$ est continue sur IR
donc en particulier u est continue sur $[1;5]$
- On a la fonction $v: x \to x^3 + x^2$ est continue sur IR (v est polynome)
en particulier v est continue sur $[1;5]$
- Et comme la fonction $f = u + v$
Alors f est continue sur $[1;5]$

2) Mq : la fonction $g: x \to \frac{x+1}{x^3+3} - \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$:

- On sait que la fonction $u: x \to \frac{x+1}{x^2+1}$
est est une fonction rationnelle
donc elle est continue sur son domaine de définition qui est IR
(car $(\forall x \in \mathbf{IR})$; $x^2 + 1 \neq 0$)
donc
en particulier u est continue sur $[0;+\infty[$
- On a la fonction $v: x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$
- Et comme la fonction $g = u - v$
Alors g est continue sur $[0;+\infty[$

3) Mq : la fonction $h: x \to \frac{\sqrt{x^2-2x}}{2x+1}$ est continue sur $[2;+\infty[$:

- On sait que la La fonction : $x \longrightarrow x^2 - 2x$
est continue sur $\mathbb{R}$
donc en particulier sur $[2;+\infty[$
et ($x^2 - 2x \geq 0$; $\forall x \in [2;+\infty[$)
alors
$u: x \longrightarrow \sqrt{x^2 - 2x}$ est continue sur $[2;+\infty[$

- On a la fonction $v : x \to 2x+1$ est continue sur $[2;+\infty[$
- Et comme la fonction $h = \frac{u}{v}$

avec ($v(x) \neq 0$ $(\forall x \in [2;+\infty[\,)$)

Alors :

h est continue sur $[2;+\infty[$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-4} & ; x < 2 \\ f(2) = 2 & \\ f(x) = \frac{6\sqrt{x^2+12}-24}{x^2-2x} & ; x > 2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f au point 2

2) En déduire **que f est continue sur $\mathbb{R}$**

Solution de l'exercice 6 :

1). Continuité de f au point 2 :

- $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2-4x-2}{x^2-x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{3x+2}{x+2}$$
$$= \frac{8}{4} = 2 = f(2)$$

Donc $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ ①

- $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{6\sqrt{x^2+12}-24}{x^2-2x}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{6\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{6(x^2+12-16)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{6(x^2-4)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{6(x^2-4)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{6(x+2)}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$
$$= \frac{6(2+2)}{2\left(\sqrt{2^2+5}+3\right)} = 2 = f(2)$$

Donc $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ ②

De ① et ② on déduit que :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

D'où f est continue en $x_0 = 2$

2). *Montrons que :* f est continue sur $\mathbb{R}$:

- *La fonction* $u : x \to \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ *est continue sur toutes intervalles inclu dans son domaine de definition* $D_u = \mathbb{R} - \{-1;2\}$

(car c'est une dontion rationnelle)

Donc f *est continue sur* $]2;+\infty[$ ①

- *La fonction fonction* $x \to x^2+12$ *est continue sur* $]-\infty;2[$

Et $\forall x \in]-\infty;2[: x^2+12 \geq 0$

Donc La fonction $x \to \sqrt{x^2+12}$ *est continue sur* $]-\infty;2[$

D'où La fonction $v : x \to 6\sqrt{x^2+5}-24$ *est continue sur* $]-\infty;2[$

- *La fonction fonction* $w : x \to x^2-2x$ *est continue sur* $]-\infty;2[$

Et $\forall x \in]-\infty;2[: x^2-2x \neq 0$

alors La fonction $f : x \to \frac{v(x)}{w(x)}$ *est continue sur* $]-\infty;2[$ ②

De ① et ② on déduit que :

f *est continue sur* $]2;+\infty[$ *et sur* $]-\infty;2[$

Et comme f *est continue en* 2

Alors

f est continue sur $\mathbb{R}$