La projection dans le plan

Série d'exercices avec correction

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

Exercice 1 :

ABC est un triangle

Le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Construire le point F le projeté de E sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que : $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3)En déduire que : les droites (EF) et (BC) sont parallèles

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle , M le milieu du segment $[AC]$

N un point du plan tel que : $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$

La droite passant par N et parallèle à (BM) coupe (AC) au point J

La droite passant par N et parallèle à (AB) coupe (AC) au point I

1) Montrer que :

$\overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MJ}$ et que $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AI}$

2) Montrer que : $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{IM}$

et en déduire que : M est le milieu de [IJ]

Exercice 3 :

Soit ABCD un parallèlogramme de centre O ;

E , F deux points du plan tels que :

$3\,\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{EB}$, $2\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FC}$,

La droite passant par E et parallèle à (BD) coupe (AC) au point I

La droite passant par F et parallèle à (BD) coupe (AC) au point J

1) Montrer que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CD}$ puis Construire la figure

2) Montrer que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CO}$

et en déduire que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{JC}$

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle . D un point de (BC) n'appartenant pas à [BC] et M un point du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

La droite passant par D et parallèle à (MC) coupe (AC) au point E

La droite passant par P et parallèle à (MB) coupe (AB) au point F

1) Montrer que :

$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AF}$

2) Montrer que: (BC) est parallèle à (EF) et $\overrightarrow{CB} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{EF}$

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle . I , J et K des points du plan tels que : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$

$3\,\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JB}$; $\overrightarrow{BK} = 3\,\overrightarrow{BC}$

1) Montre que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

puis Construire la figure .

2) Montre que : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{IK} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AB}$

3) En déduire que les points I , J et K sont alignés

4) La droite passant par I et parallèle à (AB) coupe (BC) au point L

Montrer que : $\overrightarrow{LK} = -8\,\overrightarrow{LB}$

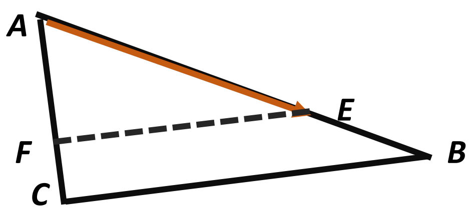
La projection dans le plan

Série d'exercices avec correction

Solution de l'exercice 1 :

ABC est un triangle
Le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
le point F le projeté de E sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

1) Construction de lafigure :



2) Montrer que : $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Soit P la projection sur la droite (AC) parallèlement à (BC)
On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
et $P(A) = A$; $P(E) = F$ et $P(B) = C$
et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité
Donc $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3) Dèduction :

On a
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$
Donc $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
c.à.d $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
D'où

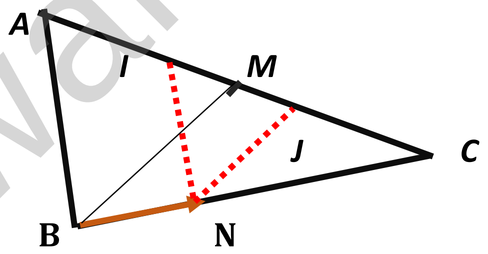
les droites (EF) et (BC) sont parallèles

Solution de l'exercice 2 :

ABC un triangle ; M milieu de [AC]
N un point du plan tel que : $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{BN}}$
La droite passant par N et parallèle à (BM) coupe (AC) au point J
La droite passant par N et parallèle à (AB) coupe (AC) au point I

1) Construction de lafigure :

$\overrightarrow{\mathrm{BN}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



2) Montrer que : $\overrightarrow{\mathrm{MC}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

- Soit P_1 la projection sur la droite (AC) parallèlement à (BM)

On a : $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BN}$
et $P_1(B) = M$; $P_1(N) = J$ et $P_1(C) = C$
et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité
Donc

$\overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MJ}$

- Soit P_2 la projection sur la droite (AC) parallèlement à (AB)

On a : $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BN}$
et $P_2(B) = A$; $P_2(N) = I$ et $P_2(C) = C$
et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité
Donc

$\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AI}$

2) Montrer que : $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{IM}$ et en déduire que : M est le milieu de [IJ]

- M milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

Et comme $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI}$

Alors $3\,\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{AM}$

$$3\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}\right) = 2\,\overrightarrow{AM}$$

$$3\,\overrightarrow{MI} = 2\,\overrightarrow{AM} - 3\,\overrightarrow{AM}$$

$$-3\,\overrightarrow{IM} = -\,\overrightarrow{AM}$$

Alors $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{IM}$

- M milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

Et comme $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{IM}$ *et* $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{IM}$

Alors $3\,\overrightarrow{IM} = 3\,\overrightarrow{MJ}$

Alors $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MJ}$

D'où M est le milieu de [IJ]

Solution de l'exercice 3 :

Soit ABCD un parallèlogramme de centre O ; E , F deux points du plan tels que :

$3\,\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{EB}$, $2\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FC}$

La droite passant par E et parallèle à (BD) coupe (AC) au point I

La droite passant par F et parallèle à (BD) coupe (AC) au point J

1) Montrer que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CD}$

- $3\,\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{EB}$

$$3\overrightarrow{AE} = 2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\right)$$

$$3\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EA} + 2\,\overrightarrow{AB}$$

$$3\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{EA} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

$$3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

$$5\,\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

Donc $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{FC} = 2\,\overrightarrow{DF}$

$$\overrightarrow{FC} = 2\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}\right)$$

$$\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{DC} + 2\,\overrightarrow{CF}$$

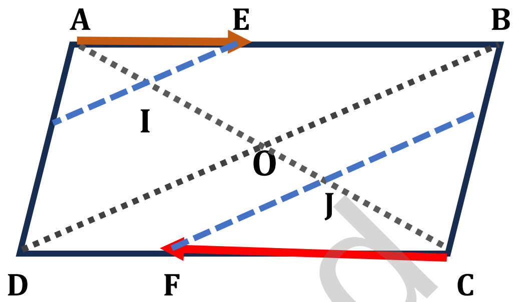
$$-2\,\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{FC} + 2\,\overrightarrow{CF}$$

$$2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} + 2\,\overrightarrow{CF}$$

$$2\,\overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{CF}$$

Donc $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CD}$

- **Construction de lafigure :**



2) Montrer que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CO}$

Soit P la projection sur la droite (AC) parallèlement à (BD)

- On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

et $P(A) = A$; $P(E) = I$ et $P(B) = O$

et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité

Donc $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AO}$

- On a : $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

et $P(C) = C$; $P(F) = J$ et $P(D) = O$

et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité

Donc $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CO}$

- **Déduction :**

O milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

Et comme $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AO}$ *et* $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CO}$

c.à.d $\overrightarrow{AO} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JC}$

Alors $\frac{5}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JC}$

c. à.d $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{2}\overrightarrow{JC}$

Donc $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{JC}$

Solution de l'exercice 4 :

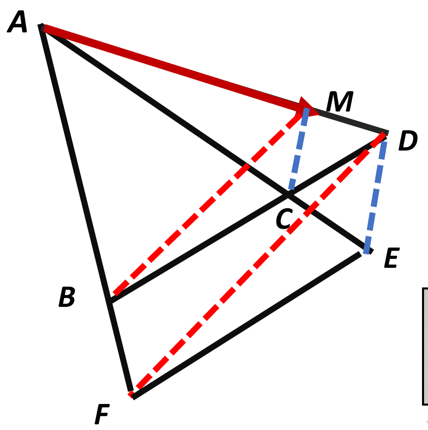
Soit ABC un triangle . D un point de (BC) n'appartenant pas à [BC] et M un point du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

La droite passant par D et parallèle à (MC) coupe (AC) au point E

La droite passant par D et parallèle à (MB) coupe (AB) au point F

1) Montrer que :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$$



- Soit P_1 la projection sur la droite (AC) parallèlement à (MC)

On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

et $P_1(A) = A$; $P_1(M) = C$ et $P_1(D) = E$

et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}}$$

- Soit P_2 la projection sur la droite (AB) parallèlement à (MB)

On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

et $P_2(A) = A$; $P_2(M) = B$ et $P_2(D) = F$

et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}}$$

2) Montrer que: (BC) est parallèle à (EF) et $\overrightarrow{CB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EF}$

On a
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{EA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AF} \\ &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{EF} \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$

c.à.d $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires

D'où

les droites (EF) et (BC) sont parallèles

Solution de l'exercice 4 :

Soit ABC un triangle .

I , J et K des points du plan tels que :

$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$; $3\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JB}$; $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$

1) Montre que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

puis Construire la figure .

- $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} \\ 2\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IA} &= \overrightarrow{AC} \\ 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AC} \\ 3\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

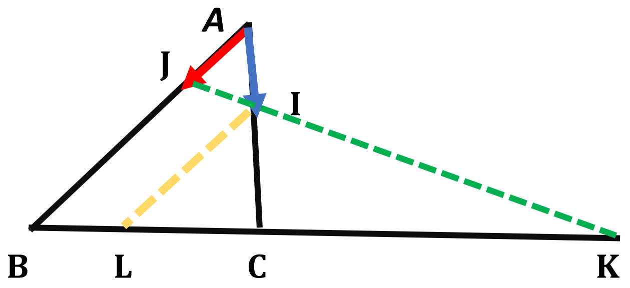
- $3\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JB}$

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} \\ 3\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{JA} &= \overrightarrow{AB} \\ 3\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} \\ 4\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}}$$

• Construction de lafigure :



2) Montre que : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{IK} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Donc

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

- $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK}$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 3\right)\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$$

Donc

$$\overrightarrow{IK} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$$

3) Déduction :

On a $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc $-8\overrightarrow{IJ} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{8}{4}\overrightarrow{AB}$

c.a d $-8\,\overrightarrow{IJ} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{IK} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{IK} = -8\,\overrightarrow{IJ}$

c.à.d $\overrightarrow{IK}$ **et** $\overrightarrow{IJ}$ **sont colinéaires**

D'où

les les points I , J et K sont alignés

4) La droite passant par I et parallèle à (AB) coupe (BC) au point L

Montrer que : $\overrightarrow{LK} = -8\,\overrightarrow{LB}$

Soit P la projection sur la droite (BC) parallèlement à (AB)

On a : $\overrightarrow{IK} = -8\,\overrightarrow{IJ}$

et $P(I) = L\,;\,P(K) = K$ **et** $P(J) = B$

et on sait que la projection conserve le coefficient de colinéarité

Donc

$$\overrightarrow{LB} = -8\,\overrightarrow{LB}$$