Notions d'arithmétique dans IN

Série d'exercices avec correction

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel ,

Déterminer la parité des nombres suivants :

$a = 14n + 47$, $b = n^3 + n^5$

$c = 2n^2 + 13^{10}$, $d = n^2 + 13n + 7$

$e = 5n^2 + 9n + 12$

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel , on pose

$a = n(n+1)(n+2)(n+3)$

Montrer que :

le nombre a est un multiple de 4 .

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel impair

a) Montrer que : $n^2 - 1$ est divisible par 8 .

b) En déduire que :

$n^4 - 1$ est divisible par 16 .

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel

on pose $p = 10n + 31$ et $q = 2n + 6$

1) Déterminer la parité des nombres a et b .

2) En déduire la parité du nombre :

$X = (3n+7)(-1)^p + (5n+8)(-1)^q$

3) On pose : $Y = (p-1)^2 + q^2$

Montrer que Y est un multiple de 104

Exercice 5 :

Soient a et b deux entiers naturels

$0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$

On pose : $X = \overline{53a2}$ et $Y = \overline{43b1b}$

1) Déterminer la valeur du chiffre a pour que le nombre X Soit divisible par 9 .

2) Déterminer les valeurs du chiffre b pour que le nombre Y soit divisible par 5 et 3

Exercice 6 :

Les nombres 113 ; 241 ; 637 et 95631 sont-ils premiers ?

Exercice 7 :

1) Décomposer 720 et 3780 en produit de facteurs premiers

2) En déduire : $pgcd(720\,,3780)$ *et* $ppcm(720\,,\,3780)$.

3) Soit $X = \sqrt{720 \times 3780}$,

Ecrire X *sous la forme* $n\sqrt{21}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose : $a = 7^{n+2} - 4 \times 7^n$

et $b = 19 \times 7^{n+1} + 17 \times 7^n$

1) Montrer que : a est multiple de 9 .

Et b est multiple de 6 .

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b .

3) En déduire : $pgcd(a;b)$ *et* $ppcm(a;b)$

Exercice 9 :

Soient a et b deux entiers naturels $(a \geq b)$

1) Montrer que :

$a + b$ *et* $a - b$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28

puis déterminer tous les entiers naturels a *et* b qui vérifient : $a^2 - b^2 = 28$

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1)Vérifier que : $\frac{n+10}{n+1} = 1 + \frac{9}{n+1}$

2)Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{N}$

3)Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$

Exercice 11 :

On pose :

$a = 10^2 \times 12$

$b = 2^2 \times 3^4 \times 13 - 2^2 \times 3^2 \times 5$

Décomposer les nombres 112 ; a et b en produit de facteurs premiers et déterminer $a \wedge b$ *et* $a \vee b$

Notions d'arithmétique dans IN

Série d'exercices avec correction

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel ,
Déterminer la parité des nombres suivants :

$\mathrm{a} = 14\mathrm{n} + 47$, $\mathrm{b} = \mathrm{n}^3 + \mathrm{n}^5$
$\mathrm{c} = 2\mathrm{n}^2 + 13^{10}$, $\mathrm{d} = \mathrm{n}^2 + 13\mathrm{n} + 7$
$\mathrm{e} = 5\mathrm{n}^2 + 9\mathrm{n} + 12$

Solution de l'exercice 1 :

- $$\begin{aligned} a &= 6n + 11 \\ &= 6n + 10 + 1 \\ &= 2(3n + 5) + 1 \\ &= 2k + 1 \ \ avec\ k = 3n + 5 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc : a est impair

Autrement :

$a = 6n + 11$
$6n$ *est pair* *et* *11 impair*
Et on sait que $(\ p + imp\ ) = imp$
Alors a *est impair*

- $b = n^3 + n^5$

n^3 *et* n^5 *sont de meme parité que* n
Et on sait que la somme de deux nombres de même parité est toujours pair
Alors : b est pair

- *C=* $2n^2 + 13^{10}$

$2n^2$ *est pair* *et* 13^{10} *impair*
Et on sait que $(\ p + imp\ ) = imp$
Alors : c est impair

- $$\begin{aligned} d &= n^2 + 13n + 7 \\ &= n^2 + n + 12n + 7 \\ &= [n(n+1)] + [12n + 7] \end{aligned}$$

$n(n+1)$ *est pair car il est produit de deux nombres consécutifs*
$12n + 7$ *est impair*
Et on sait que $(\ p + imp\ ) = imp$
Alors : d est impair

- $$\begin{aligned} e &= 5n^2 + 9n + 12 \\ &= n^2 + 4n^2 + n + 8n + 12 \\ &= n^2 + n + 4n^2 + 8n + 12 \\ &= [n(n+1)] + [4n^2 + 8n + 12] \end{aligned}$$

$n(n+1)$ *est pair car il est produit de deux nombres consécutifs*
$4n^2 + 8n + 12$ *est pair*
(comme somme des nombes pairs)
Et on sait que $(\ p + p\ ) = p$
Alors : d est pair

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel , on pose
$\mathrm{a} = \mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)$
Montrer que :
le nombre a est un multiple de 4 .

Solution de l'exercice 2 :

On a le nombre $n(n+1)$ est produit de deux nombres consécutifs donc il est pair
donc $n(n+1) = 2k$, *avec* $k \in \mathbb{N}$
De même le nombre $(n+2)(n+3)$ est produit de deux nombres consécutifs donc il est pair
donc $(n+2)(n+3) = 2p$,*avec* $p \in \mathbb{N}$

alors $$\begin{aligned} a &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= 2k \times 2p \\ &= 4 \times kp\ , \quad avec\ \ kp \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

D'où : le nombre a est multiple de 4 .

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel impair
a) Montrer que : $\mathrm{n}^2 - 1$ est divisible par 8 .
b) En déduire que :
$\mathrm{n}^4 - 1$ est divisible par 16 .

Solution de l'exercice 3 :

a) Montrer que : $n^2 - 1$ est divisible par 8 .

On a n un entier naturel impair

Donc n=2k+1 avec k un entier :

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1$$
$$= (2k)^2 + 2 \times 2k + 1 - 1$$
$$= 4k^2 + 4k$$
$$= 4\,k(k+1)$$

($k(k+1)$ est produite de deux nombres consécutifs) donc il est pair

$$alors : \quad n^2 - 1 = 4 \times 2k' \quad , \quad avec\ k' \in \mathbb{N}$$
$$= 8\,k' \quad , \quad avec\ k' \in \mathbb{N}$$

D'où : $n^2 - 1$ est divisible par 8 .

b) Déduction :

On a : $n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2$
$$= (n^2 - 1)(n^2 + 1)$$
$$= 8k'\,[(2k+1)^2 + 1\,]$$
$$= 8k'\,[(2k)^2 + 2 \times 2k + 1 + 1\,]$$
$$= 8k'\left[4k^2 + 4k + 1 + 1\,\right]$$
$$= 8k'\left[4k^2 + 4k + 2\right]$$
$$= 8k' \times 2\left[2k^2 + 2k + 1\right]$$
$$= 16\,k'\left[2k^2 + 2k + 1\right]$$

Alors $n^4 - 1 = 16\,p$

$$avec \quad p = k'\left[2k^2 + 2k + 1\right] \in \mathbb{N}$$

D'où : $n^4 - 1$ est divisible par 16

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel on pose p= $10n + 31$ et $q = 2n + 6$

1) Déterminer la parité des nombres a et b .

2) En déduire la parité du nombre :

$X = (3n + 7)(-1)^p + (5n + 8)(-1)^q$

3) On pose : $Y = (p - 1)^2 + q^2$

Montrer que Y est un multiple de 104 .

Solution de l'exercice 4 :

1) Étudier la parité des nombres p et q .

- $p = 10n + 31$
$$= 10n + 30 + 1$$
$$= 2(5n + 15) + 1$$
$$= 2k + 1 \quad avec\ k = 3n + 15 \in \mathbb{N}$$

Donc : p est un entier impair

- $q = 2n + 6$
$$= 2(n + 3)$$
$$= 2k \quad avec\ k = n + 3 \in \mathbb{N}$$

Donc : q est un entier pair

2) Déduction :

On a $X = (3n + 7)(-1)^p + (5n + 8)(-1)^q$

Avec q un entier pair donc : $(-1)^p = 1$

Et p impair donc $(-1)^p = -1$

On remplace dans X on trouve que :

$$X = (3n + 7)(-1)^p + (5n + 8)(-1)^q$$
$$= 5n + 8 - (3n + 7)$$
$$= 5n + 8 - 3n - 7$$
$$= 2n + 1$$

Donc : X est un entier impair

3) Montrer que : Y est un multiple de 104

$$Y = (p - 1)^2 + q^2$$
$$= (10n + 31 - 1)^2 + (2n + 6)^2$$
$$= (10n + 30)^2 + (2n + 6)^2$$
$$= (10(n + 3))^2 + (2(n + 3))^2$$
$$= 100(n + 2)^2 + 4(n + 2)^2$$
$$= 104(n + 2)^2$$

Donc $Y = 104\,k\,;\ avec\ k = (n + 2)^2 \in \mathbb{N}$

D'où : Y est un multiple de 104 .

Exercice 5 :

Soient a et b deux entiers naturels

$0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$

On pose : $X = \overline{53a2}$ et $Y = \overline{43b1b}$

1) Déterminer la valeur du chiffre a pour que le nombre X Soit divisible par 9 .

2) Déterminer les valeurs du chiffre b pour que le nombre Y soit divisible par 5 et 3

Solution de l'exercice 5 :

1) Déterminons la valeur du chiffre a :

le nombre $X = \overline{53a2}$ est divisible par 9

signfie $5 + 3 + a + 2$ est un multiple de 9

c.à.d $10 + a$ est un multiple de 9

et $0 \leq a \leq 9$ donc $10 \leq 10 + a \leq 19$

alors $10 + a = 18$ donc $a = 8$

D'où : $a = 8$

2) *Déterminons la valeur du chiffre b :*

- *le nombre* $Y = \overline{43b1b}$ *est divisible par 3*

donc

$4+3+b+1+b$ *est un multiple de 3*

c.à.d $8+2b$ *est un multiple de 3*

- *le nombre* $Y = \overline{43b1b}$ *est divisible par 3*

Donc $b = 0$ *ou* $b = 5$

Pour $b = 0$ *:*

$8+2b = 7$ *n'est pas un multiple de 3*

Pour $b = 5$ *:*

$8+2b = 18$ *est un multiple de 3*

D'où : $b = 5$

Exercice 6 :

Les nombres 113 ; 241 ; 637 et 95631 sont-ils premiers ?

Solution de l'exercice 6 :

1) 113 est-ils premiers ?

On a : $\sqrt{113} = 10,63 \ldots$ *alors*

Les nombres premiers inférieurs ou égales à $\sqrt{113}$ *sont* $2, 3, 5, 7$

On vérifie :

si l'un de ces dérniers nombres divise 113

Aucum de ces nombres ne divise 113 , alors 113 est un nombre premier.

2) 241 est-ils premiers ?

On a : $\sqrt{241} = 15,52 \ldots$ *alors*

Les nombres premiers inférieurs ou égales à $\sqrt{241}$ *sont* $2, 3, 5, 7, 11, 13$

On vérifie :

si l'un de ces dérniers nombres divise 241

Aucum de ces nombres ne divise 241 , alors 241 est un nombre premier.

3) 637 est-ils premiers ?

On a : $\sqrt{637} = 25,23 \ldots$ *alors*

Les nombres premiers inférieurs ou égales à $\sqrt{637}$ *sont* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$

On vérifie :

si l'un de ces dérniers nombres divise 637

Les nombres 2 , 3 ,5 ne divisent pas 637 ,

Mais 7 divise 637 $(637 = 7 \times 91)$

alors 637 n'est pas un nombre premier.

Exercice 7 :

4) Décomposer 720 et 3780 en produit de facteurs premiers

5) En déduire : $pgcd(720, 3780)$ *et* $ppcm(720, 3780)$ *.*

6) Soit $X = \sqrt{720 \times 3780}$ *,*

Ecrire X *sous la forme* $n\sqrt{21}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

Solution de l'exercice 7 :

1) Décomposition de 720 et 3780 :

720	2	;	3780	2
360	2	;	1890	2
180	2	;	945	3
90	2	;	315	3
45	3	;	105	3
15	3	;	35	5
5	5	;	7	7
1		;	1	

Donc : $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

et $3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

2) Déduction du pgcd et ppcm :

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

et $3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

Alors :

$$\text{pgcd}(370; 3780) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$

Et $\text{ppcm}(370; 3780) = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 5040$

3) Simplification de X :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{370 \times 3780} \\ &= \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 5 \times 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7} \\ &= \sqrt{2^6 \times 3^5 \times 5^2 \times 7} \\ &= \sqrt{(2^3)^2 \times (3^2)^2 \times 5^2 \times 3 \times 7} \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times \sqrt{21} \\ &= 360\sqrt{21} \end{aligned}$$

D 'ou $X = 360\sqrt{21}$

Exercice 8 : *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

On pose : $a = 7^{n+2} - 4 \times 7^n$

et $b = 19 \times 7^{n+1} + 17 \times 7^n$

1) Montrer que : a est multiple de 9 .

Et b est multiple de 6 .

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b .

3) En déduire

$pgcd(a;b)$ *et* $ppcm(a;b)$

Solution de l'exercice 8 :

1) • Montrer que : a est multiple de 9 .

$$a = 7^{n+2} - 4 \times 7^n$$
$$= 7^n \times 7^2 - 7^n$$
$$= 7^n(7^2 - 4)$$
$$= 7^n \times 45$$
$$= 7^n \times 5 \times 9$$

Donc a est multiple de 9

• Montrer que : b multiple de 6 .

$$b = (19 \times 7^{n+1}) + (17 \times 7^n)$$
$$= (19 \times 7^n \times 7) + (17 \times 7^n)$$
$$= 7^n(19 \times 7 + 17)$$
$$= 7^n \times 150$$
$$= 7^n \times 25 \times 6$$

Donc b est multiple de 6 .

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b :

On a d'après la question précédente

$a = 7^n \times 5 \times 9$ et $b = 7^n \times 25 \times 6$

Donc $a = 7^n \times 5 \times 3^2$

$b = 7^n \times 5^2 \times 3 \times 2$

3) Déduction : $pgcd(a;b)$ *et* $ppcm(a;b)$

$a = 7^n \times 5 \times 3^2$

Et $b = 7^n \times 5^2 \times 3 \times 2$

Donc $pgcd(a;b) = 7^n \times 5 \times 3$

Et $ppcm(a;b) = 7^n \times 5^2 \times 3^2 \times 2$

Exercice 9 :

Soient a et b deux entiers naturels $(a \geq b)$

1) Montrer que :

a+b *et* $a - b$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28

puis déterminer tous les entiers naturels

a *et* b qui vérifient : $a^2 - b^2 = 28$

Solution de l'exercice 9 :

1) Montrer que :

a+b *et* $a - b$ sont de même parité

On sait que :

1) La somme de deux nombres entiers de même parités est un nombre pair .

2) La somme de deux nombres entiers de parités différentes est un nombre impair .

Et ona

$$(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = 2a$$

Donc la somme de $(a + b)$ *et* $(a - b)$ est un entier pair

D'ou :

a+b *et* $a - b$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28 :

$$28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$$

Donc $D_{28} = \{1 , 2 , 4 , 7 . 14 , 28\}$

3) Déterminer tous les entiers naturels a et b qui vérifient : $a^2 - b^2 = 28$

$a^2 - b^2 = 28$ Donc

$$(a - b)(a + b) = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$$

On a a+b *et* $a - b$ sont de même parité

Et a$-b \leq a + b$

Donc le seul cas possible est que :

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 14 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} 2a = 16 \\ a + b = 14 \end{cases}$; $(E_1 + E_2)$

Donc : $\begin{cases} a = 8 \\ a + b = 14 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} a = 8 \\ 8 + b = 14 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$

D'ou : $a = 8$ *et* $b = 6$

Exercice 6 :

Soit $x = 12^2 \times 10$; $y = 18^2 \times 20$

Décomposer x *et* y *en produit de facteurs premiers et déterminer* $x \wedge y$ *et* $x \vee y$

Solution de l'exercice 6 :

- $x = 12^2 \times 10 = (2^2 \times 3)^2 \times 2 \times 5$

$= 2^4 \times 3^2 \times 2 \times 5$

Donc $x = 2^5 \times 3^2 \times 5$

- $y = 18^2 \times 20 = (3^2 \times 2)^2 \times 2^2 \times 5$

$= 3^4 \times 2^2 \times 2^2 \times 5$

Donc $y = 2^4 \times 3^4 \times 5$

- ***Deduction :***

$x = 2^5 \times 3^2 \times 5$ *et* $y = 2^4 \times 3^4 \times 5$

Alors :

$pgcd(x; y) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$

Et $ppcm(a; b) = 2^5 \times 3^4 \times 5 = 12960$

Exercice 10 : *Soit n* $\in \mathbb{N}$ *.*

1)Vérifier que : $\frac{n+10}{n+1} = 1 + \frac{9}{n+1}$

2)Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{N}$

3)Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$

Solution de l'exercice 10 :

1)Vérifier que : $\frac{n+10}{n+1} = 1 + \frac{9}{n+1}$

$$1 + \frac{9}{n+1} = \frac{n+1+8}{n+1} = \frac{n+10}{n+1}$$

2)Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{N}$

$\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{N}$ c-à-d $1 + \frac{9}{n+1} \in \mathbb{N}$

c-à-d $\frac{9}{n+1} \in \mathbb{N}$

c-à-d n+1 divise 9

Et $D_9 = \{1 , 3 , 9\}$ Donc

$n + 1 = 1$ *ou* $n + 1 = 3$ *ou* $n + 1 = 9$

c-à-d $n = 0$ *ou* $n = 2$ *ou* $n = 8$

D'ou

les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{N}$ *sont : 0 ; 2 et 8*

3) **Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles :** $\frac{2n+11}{n+3} \in \mathbb{N}$

On a $\frac{2n+11}{n+3} = \frac{2n+6+5}{n+3}$

$$= \frac{2(n+3)+5}{n+3}$$

$$= \frac{2(n+3)}{n+3} + \frac{5}{n+3}$$

$$= 2 + \frac{5}{n+3}$$

$\frac{2n+11}{n+3} \in \mathbb{N}$ c-à-d $2 + \frac{5}{n+3} \in \mathbb{N}$

c-à-d $\frac{5}{n+3} \in \mathbb{N}$

c-à-d 5 est divisible par n+3

Donc $n + 3 = 1$ *ou* $n + 3 = 5$

c-à-d $n = -2$ *ou* $n = 2$

et comme n est un entier naturel

alors : $n = 2$

Donc :

la seule valeur de l'entier naturels n pour lesquelles $\frac{2n+11}{n+3} \in \mathbb{N}$ est : 2

Exercice 11 : *On pose :*

$a = 10^2 \times 12$

$b = 2^2 \times 3^4 \times 13 - 2^2 \times 3^2 \times 5$

Décomposer les nombres 112 ; a et b en produit de facteurs premiers et déterminer

$a \wedge b$ *et* $a \vee b$

Solution de l'exercice 11 :

- $112 = 2^4 \times 7$
- $a = 10^2 \times 12 = (2 \times 5)^2 \times 2^2 \times 3$

$= 2^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 3$

Donc $a = 2^4 \times 5^2 \times 3$

- $b = 2^2 \times 3^4 \times 13 - 2^2 \times 3^2 \times 5$

$= 2^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 13 - 2^2 \times 3^2 \times 5$

$= 2^2 \times 3^2 \times (3^2 \times 13 - 5)$

$= 2^2 \times 3^2 \times 112 = 2^4 \times 7$

$= 2^2 \times 3^2 \times 2^4 \times 7$

Donc $b = 2^6 \times 3^2 \times 7$

- ***Deduction :***

$a = 2^4 \times 3 \times 5^2$ *et* $b = 2^6 \times 3^2 \times 7$

Alors : $pgcd(a; b) = 2^4 \times 3 = 48$

$ppcm(a; b) = 2^6 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 12960$