Série N°1

✍ Continuité
✍ Dérivation

✍ **Pr.Abdelwahed**

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

Exercice 3

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2+\sqrt{5-x}; & x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; & x > 4 \end{cases}$

   (a) Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 4.

   (b) Est-ce que f est continue en 4 ?

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}; & x > 0 \\ h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}; & x < 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

   Étudier la continuité de h en 0

3. Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3; & x \leq 0 \\ f(x) = x+a; & x > 0 \end{cases}$

   Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.

Correction

1. (a) **Étudions la continuité de f à gauche en 4 :**

   On a :

   $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 2+\sqrt{5-x} = 2+\sqrt{5-4} = 3.$

   Et on a : $f(4) = 2+\sqrt{5-4} = 3$

   Alors : $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4).$

   Donc f est continue à gauche en 4.

   Étudions la continuité de f à droite en 4 :

   On a :

   $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{x}+2 = 4.$

   Et on a : $f(4) = 2+\sqrt{5-4} = 3$

   Alors : $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \neq f(4).$

   Donc f est discontinue à droite en 4.

   (b) Puisque f est discontinue à droite en 4, donc f est discontinue en 4.

2. **Étudions la continuité de h à gauche en 0 :**

   On a :

   $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0.$

   Et on a : $h(0) = 0$

   Alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h(0).$

   Donc h est continue à gauche en 0.

   Étudions la continuité de h à droite en 0 :

   On a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$

Et on a : $h(0) = 0$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = h(0).$

Donc h est continue à droite en 0.

Conclusion : On a $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = h(0)$, donc h est continue en 0.

3. f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

   On a : $f(0) = 0^3 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + a = a$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = 0$.

   Donc : $a = 0$