Série N°1

✍ **Continuité**
✍ **Dérivation**

Exercice 2

Étudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants :

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^4-1}{x+1}; & x \neq -1 \\ f(-1) = -4 \end{cases}$; $a = -1$

2. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+4x-5}{\sqrt{x+8}-3}; & x \neq 1 \\ f(1) = 36 \end{cases}$; $a = 1$

3. $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}; & x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$; $a = 1$

4. $\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{x}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $a = 0$

Correction

1. On a :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^4-1}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} (x-1)(x^2+1) = -4.$$

Alors $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1)$.

Donc f est continue en -1.

2. On a :

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x\to1} \frac{(x^2+4x-5)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)} = \lim_{x\to1} \frac{(x^2+4x-5)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+5)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1} = \lim_{x\to1} (x+5)\left(\sqrt{x+8}+3\right) = 36.$$

Alors $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$.

Donc f est continue en 1.

3. $$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3x+1}} = -\frac{1}{4}.$$

Alors $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$.

Donc f est continue en 1.

4. $$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1 - \cos(2x) + 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1-\cos 2x}{x}$$
$$\overset{x\neq0}{=} \lim_{x\to0} \frac{-(1-\cos x)}{x^2} \times x + \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \times 4x = -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

Alors $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$.

Donc f est continue en 0.