Chapitre 02 : Calcul Vectoriel dans le plan

Prof : Abdelwahed

Niveau Scolaire : TCSF

Durée : 5Heures

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

Les capacités Attendues	Contenu du cours
❖ Construire un vecteur de la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$. ❖ Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement. ❖ Résoudre des problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.	❖ Egalité de deux vecteurs ; somme de deux vecteurs ; relation de Chasles. ❖ Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. ❖ Colinéarité de deux vecteurs, alignement de trois points. ❖ Définition vectorielle du milieu d'un segment.

Etapes	Contenu du cours et Activités	Remarques

I-Egalité de deux vecteurs-Somme de deux vecteurs :

Activité

Soient A, B, C et D quatre points du plan

1)Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2)Montrer que $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}$; puis déduire la nature du quadrilatère $EFCB$

Définition et Propriétés

1)On dit que deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.

2)Soient A ; B ; C et D quatre points du plan. Ona :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ Est appelée Relation de Chasles.
- Si A et B deux points confondus alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$ (Vecteur nul).
- Si A et B deux points distincts alors : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ (Opposé d'un vecteur).

Application

1)Soient $ABCD$ et $ABEF$ deux parallélogrammes.

Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.

2)On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que :

$$\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$$

Simplifier les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

II-Multiplication d'un vecteur par un réel

Activité

Soient ABC un triangle. Construire les points M ; N ; P et K tels que :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = -2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini par :

- Si $k > 0$ Alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction ;la même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$ Alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction ;de sens contraire et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.

Remarques

1)Si $k = 0$ Alors $k\vec{u} = \vec{0}$ càd $0.\vec{u} = \vec{0}$

2)Si $\vec{u} = \vec{0}$ Alors $k\vec{u} = \vec{0}$ càd $k.\vec{0} = \vec{0}$

3)Ona $1.\vec{u} = \vec{u}$ et $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$

4)Ona $k.\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Application

Soient ABC un triangle. Construire les points E ; F ; G et H tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α ; β deux réels ona :

1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ 2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ 3) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Exemples

1) Ona $7\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \left(7 - \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{11}{3}\overrightarrow{AB}$

2) Ona $5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC} = 5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 5\overrightarrow{AC}$

3) Ona $2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$

Application

1)Simplifier les écritures vectorielle suivantes :

$\vec{a} = 2\left(\vec{u} + 5\vec{v}\right) + 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right)$ et $\vec{b} = 13\vec{u} + 3\left(4\vec{v} - \vec{u}\right) + 2\vec{v}$

2)En déduire une relation vectorielle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

III-Colinéarité de deux vecteurs-Alignement de trois points

Activité

Soient ABC un triangle et soient D et M deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1)Construire une figure convenable.
2)Déduire la relation vectorielle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM}$.
3)Que peut-on déduire pour les points $A\,;D$ et M ?

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires</u> si seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

Propriétés

Soient $A\,;B\,;C$ et D quatre points du plan.
1)On dit que les points $A\,;B$ et C sont <u>alignés</u> si seulement s'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
2)On dit que les droites (AB) et (CD) sont <u>parallèles</u> si seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Application 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme.E et F deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AD}$.

1)Construire une figure convenable.

2)Montrer que : $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

3)En déduire que les points $C\,;E$ et F sont alignés.

Application 2

Soit ABC un triangle.E et F deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AC}$.

1)Construire une figure convenable.

2)Montrer que : $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

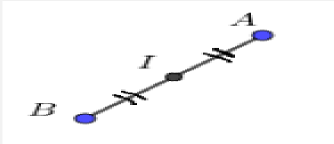
3)En déduire que droites (BF) et (AC) sont parallèles.

$I\mathbb{V}$-Milieu d'un segment

Proposition 1

Soient A ; B et I trois points du plan.
I est le milieu du segment $[AB]$ si seulement si l'une des relations suivantes soit réalisée :

1) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
2) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Application

Soit ABC un triangle. E et F deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
1)Construire une figure convenable.
2)Montrer que le point B est le milieu du segment $[EF]$

Remarque : Théorème des milieux

Soient ABC un triangle.

Si I est le milieu du $[AB]$ et I est le milieu du $[AC]$ alors : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Proposition 2 : Propriété caractéristique

Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors pour tout point M du plan, ona : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Preuve :

Soit un point M du plan.
Ona : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$
$=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$
Puisque I est le milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
Donc : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan.

Exercice global

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et soit G un point du plan tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) Construire une figure convenable.
2) Montrer que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{AG}$.
3) En déduire que : G est le milieu du segment $[OA]$.
4)soient E et F deux points du plant tels que: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a-Construire E et F.
b-Montrer que E est le milieu du segment $[AF]$.
c-Montrer que :

$$\overrightarrow{DG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$$

d-En déduire que les points D; G et E sont alignés.