Exercices corrigés

- Continuité -

Exercice I

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1} & ; x < 1 \\ f(1) = c & \\ f(x) = x - 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b et c pour la fonction f soit continue en 1

Correction

Pour que la fonction f soit continue en 1, il faut que : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - 2 = -1$ et $f(1) = c$. Donc : $c = -1$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - ax + 3 = 4 - a$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + bx - b - 1 = 0$

Alors, pour que f admet une limite finie à gauche en 1, il faut que : $4 - a = 0$

Donc : $a = 4$

(Si $a \neq 4$, alors la limite de f à gauche en 1 est infinie ; c'est un cas à rejeté car f est continue en 1)

Si $a = 4$, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + bx - b - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x^2 - 1 + bx - b} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1) + b(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+b+1)} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x-3}{x+b+1} \\ &= \frac{-2}{b+2} \end{aligned}$$

Comme : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$, alors $\dfrac{-2}{b+2} = -1$

Donc : $b = 0$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}$$

1 Montrer que f est continue sur I.

2 Montrer que f est strictement décroissante sur I.

3 **a** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1 < \alpha < 2$.

b En déduire le signe de $f(x)$ sur I.

c Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25.

d Montrer que $\alpha^4 - \alpha^3 - 1 = 0$.

Correction

1 Puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$, alors elle est continue, en particulier, sur I.

D'autre part $x \mapsto x^2 - x$ est continue et positive sur I,
donc $x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$ est continue sur I.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi f est continue sue I, en tant que différence de deux fonctions continues.

2 La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$.
Soit $x \in]1; +\infty[$, On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\sqrt{x^2 - x}\right)' \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{(x^2 - x)'}{\sqrt{x^2 - x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{(2x - 1)'}{\sqrt{x^2 - x}} \\ &= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}}\right) \end{aligned}$$

Comme $x > 1$, alors $2x - 1 > 0$. Donc $(\forall x \in]1; +\infty[)$, $f'(x) < 0$. Par suite f est strictement décroissante sur I.

3 **a** On a f est continue sur I. De plus, $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0$, alors $f(x) \times f(2) < 0$.
D'autre part, f est strictement décroissante sur I, en particulier sur $[1; 2]$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$.

b Soit $x \in I$;

On a f est strictement décroissante sur I, donc :

- Si $x \geq \alpha$, alors $f(x) \leq f(\alpha)$ d'où $f(x) \leq 0$.
- Si $1 \leq x \leq \alpha$, alors $f(x) \geq f(\alpha)$ d'où $f(x) \geq 0$.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	1		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

c
- Le centre de $[1; 2]$ est $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4-3\sqrt{3}}{6} < 0$, donc $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, ainsi $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ qui est un encadrement d'amplitude 0.5.
- Le centre de $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ est $\frac{\frac{3}{2}+1}{2} = \frac{5}{4}$; et $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{16-5\sqrt{5}}{20} > 0$, donc $f\left(\frac{5}{4}\right) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, ainsi $\frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$ qui est un encadrement d'amplitude 0.25

4 On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 - \alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha^4 - \alpha^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha^4 - \alpha^3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

D'où : $\alpha^4 - \alpha^3 - 1 = 0$

Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [2; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1 Montrer que f admet une fonction réciproque d^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2 Dresser le tableau de variations de f^{-1}

3 Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4 **a** Déterminer $f^{-1}(0)$.

b Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Correction

1 On a f est continue sur I, car c'est la restriction d'une fonction polynôme.

De plus f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$: $f'(x) = \left(x^2 - 4x + 3\right)' = 2x - 4$.

Par conséquent, $(\forall x \in I)$; $f'(x) \geq 0$ et $f'(2) = 0$. Donc f est strictement croissante sur I.

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} su l'intervalle $J = f(I)$ avec :

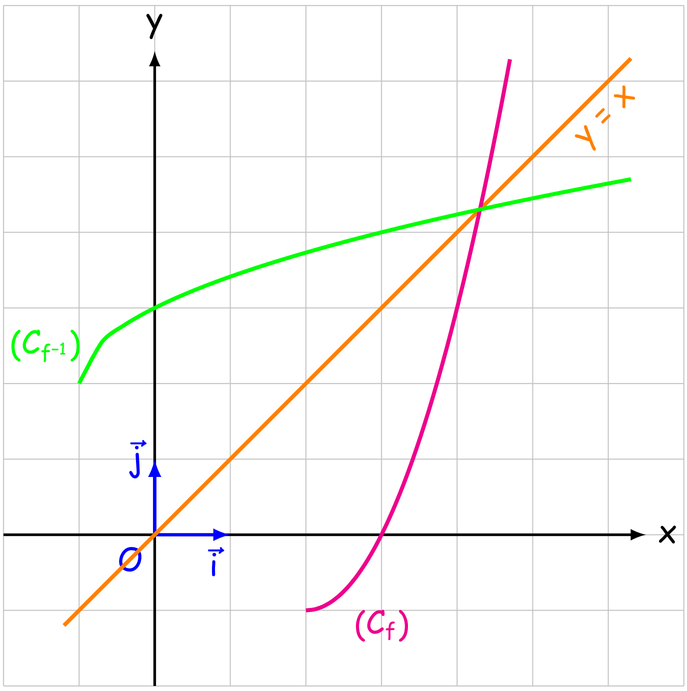
$$\begin{aligned} J &= f\,[2; +\infty[\\ &= \left[f(2); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[\\ &= [-1; +\infty[\end{aligned}$$

2 Comme f est strictement croissante sur I et comme f et f^{-1} ont le même sens de variations (respectivement sur I et f(I)), alors f^{-1} est strictement croissante sur J.

Ainsi le tableau de variations de f^{-1} est comme suit :

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$f^{-1}(x)$	$2 \nearrow +\infty$

3 Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).



4 Posons $a = f^{-1}(0)$. On a : $f(a) = 0$ et $a \in I$

Donc a est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans I.

Résolvant l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$:

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4$

Alors : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{4}}{2} = \dfrac{6}{2} = 2$

Or, $1 \notin I$

Donc : $\alpha = 3$

Par suite : $f^{-1}(0) = 3$.

5 Soit $x \in J$ et $y \in I$. On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = x \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 - 1 = x \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x+1} \quad \text{car } x \geq 1 \text{ et } y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Par suite : $(\forall x \in J),\ f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$.

Exercice 4

1 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2}$ et $\sqrt[6]{10}$

2 Simplifier les nombres suivants : $A = \dfrac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}}}$ et $B = \dfrac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a (E) : $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x} = 1$ **b** (I) : $\sqrt[3]{x-5} < 2$

4 Calculer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{\sin(x)}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 7} - 2x$ **c** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 7} - 2x$

Correction

1 On a :

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$
- $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$

Comme : $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[6]{25}$, car la fonction $x \mapsto \sqrt[6]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Alors : $\sqrt{2} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[3]{5}$

2 On a :

$$A = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2^9 \times 2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{6}}{\sqrt{9 \times 2} \times \sqrt[6]{256}}$$
$$= \frac{2^3 \times \sqrt[3]{2} \times 2\sqrt{2} \times 6}{3\sqrt{2} \times \sqrt[6]{2^8}}$$
$$= \frac{32 \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^4}}$$
$$= \frac{32}{\sqrt[3]{2^3}}$$
$$= \frac{32}{2}$$
$$= 16$$

$$B = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$$
$$= \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$$
$$= \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times 3 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$
$$= 3^{\frac{2}{3}+1+5-\frac{17}{3}}$$
$$= 3^1$$
$$= 3$$

Donc : $A = 16$ et $B = 3$

3 **a** L'ensemble de définition de l'équation (E) est :

$D_E = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x \geq 0 \text{ et } x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \text{ et } x \geq 0\} = [0; 1]$

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x}\right)^3 = 1^3$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 . \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{1-x} . \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 1$$
$$\Leftrightarrow 1 - x + 3\sqrt[3]{1-x}.\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x}\right) + x = 1$$
$$\Leftrightarrow 1 - x + 3\sqrt[3]{1-x}.\sqrt[3]{x} + x = 1$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{1-x}.\sqrt[3]{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{0; 1\}$

b L'ensemble de définition de l'inéquation (I) est : $D_I = \{x \in \mathbb{R} / x - 5 \geq 0\} = [5; +\infty[$

Soit $x \in D_I$. On a :

$$\sqrt[3]{x-5} < 2 \Leftrightarrow (x-5)^3 < 2^3$$
$$\Leftrightarrow x - 5 < 8$$
$$\Leftrightarrow x < 13$$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$S = [5; +\infty[\cap]-\infty; 13[= [5; 13[$

4 **a** On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+8}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}{\sin(x)\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+8)^3}-2^3}{\sin(x)\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}$$

$$=1\times\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+2.\sqrt[3]{8}+4}$$

$$=\frac{1}{12}$$

b On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+7}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}\right)}-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}-2\right)$$

$$=-\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}-2=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

c On a :

$$\lim_{x\to}\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}\right)^3-(2x)^3}{\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}+4x^2}$$

$$=\frac{8x^3+x^2+7-8x^3}{\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}+4x^2}$$

$$=\frac{x^2+7}{\left(x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2+2x^2\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}+4x^2}$$

$$=\frac{x^2\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}+4\right]}$$

$$\lim_{x\to} \sqrt[3]{8x^3+x^2+7}-2x = \frac{\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}{\left[\left(\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}+4\right]}$$
$$= \frac{1}{12}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x+4}$$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2 Vérifier que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = \left(\sqrt{x+4}-1\right)^2 - 5$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3 Monter que f est continue sur D_f.

4 **a** Montrer que pour tout $x \in]-4;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{x+3}{\left(\sqrt{x+4}+1\right)\sqrt{x+4}}$

b Dresser la tableau de variations de f sur D_f.

5 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-3;+\infty[$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Calculer $g^{-1}(4)$.

c Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Correction

1 On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / , x+4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / , x \geq -4\} = [-4;+\infty[$

2 Soit $x \in D_f$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2\sqrt{x+4} \\ &= x+4-4-2\sqrt{x+4} \\ &= \sqrt{x+4}^2 - 2\sqrt{x+4} + 1^2 - 1^2 - 4 \\ &= \left(\sqrt{x+4}-1\right)^2 - 5 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in [-4;+\infty[)$; $f(x) = \left(\sqrt{x+4}-1\right)^2 - 5$.

3 On a : $x \mapsto x+4$ est continue et positive sur $[-4;+\infty[$, donc $x \mapsto 2\sqrt{x+4}$ est continue sur $[-4;+\infty[$.

D'autre part, $x \mapsto x$ est continue sur $[-4;+\infty[$.

Par suite, f est continue sur $D_f = [-4;+\infty[$, en tant que différence de deux fonctions continues.

4 **1** La fonction f est dérivable sur $]-4;+\infty[$.

Soit $x \in]-4;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - 2\sqrt{x+4}\right)' \\ &= 1 - 2\frac{(x+4)'}{2\sqrt{x+4}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \\ &= \frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{x+4}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+4}} \\ &= \frac{x+3}{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+4}} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(\forall x \in]-4;+\infty[);\ f'(x) = \dfrac{x+3}{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+4}}}$

2 Soit $x \in]-4;+\infty[$;

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x+3}{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+4}} = 0 \\ &\Leftrightarrow x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	-4		-3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

5 **a** On a g est continue et strictement croissante sur I, alors elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$J = g(I) = g([-3;+\infty[) = \left[g(-3); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-5;+\infty[$

b On pose $g^{-1}(4) = \alpha$. On a : $g(\alpha) = 4$ et $\alpha \in I$. Résolvant l'équation $g(\alpha) = 4$:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 4 &\Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha + 4} = 4 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha + 4} - 1\right)^2 - 5 = 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\alpha + 4} - 1 = 3 \qquad \text{car } \alpha \geq -4 \\ &\Leftrightarrow \alpha + 4 = 16 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 12 \end{aligned}$$

Donc : $g^{-1}(4) = 12$.

c Soit $x \in J$ et $y \in I$. On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y + 4} = x \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{y + 4} - 1\right)^2 - 5 = x \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{y + 4} - 1\right)^2 = x + 5 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y + 4} = \sqrt{x + 5} + 1 \qquad \text{car } x \geq -5 \text{ et } y \geq -3 \\ &\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + 5} + 1\right)^2 - 4 \end{aligned}$$

Par suite : $(\forall x \in J),\ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + 5} + 1\right)^2 - 4$.