# Fiche technique

| Professeur : Abdelwahed | Matière : Mathématiques |
|---|---|

***Ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$***
***Notions en arithmétique***

| | Durée : 7 heures | Niveau : TCSF |
|---|---|---|
| **Les capacités attendues** | - Utiliser la parité et la décomposition en produit de facteurs premiers pour résoudre des problèmes simples portant sur les entiers naturels. | |
| **Contenus du programme** | - Les nombres pairs et les nombres impairs ;<br>- Multiples d'un nombre, le plus petit multiple commun de deux nombres ;<br>- Diviseurs d'un nombre, le plus grand diviseur commun de deux nombres ;<br>- Nombres premiers, décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers. | |
| **Recommandations pédagogiques** | - On introduira les symboles : $\in, \notin, \subset, \not\subset, \cap, \cup$.<br>- L'objectif de la présentation de « notions en arithmétique » est d'initier les élèves à des modes de démonstration à travers l'utilisation des nombres pairs et des nombres impairs sans excès. | |
| **Fichiers utilisés dans la préparation du cours** | - Les orientations pédagogiques.<br>- Livre d'élève (najah)<br>- Des sites électroniques.<br>- Distribution périodique du programme de mathématiques. | |
| **Rôle de l'enseignant** | - Ecrire l'activité au tableau<br>- Marquer les difficultés<br>- Répartir les tâches<br>- Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle<br>- Diagonaliser les prérequis des apprenants<br>- Noter les observations | |
| **Rôle de l'apprenant** | - Ecrire les activités<br>- Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions.<br>- Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une propriété…<br>- Répondre aux exercices | |

Outils didactiques : Tableau, livre, craie……

# *Arithmétique dans $\mathbb{N}$*

## I. Ensemble des nombres entiers naturels

### ☞Activité

Parmi les nombres suivants :0 ;8 ; $\sqrt{25}$ ;$\sqrt{34}$ ; 12,5 ; $\frac{12}{3}$. Préciser ceux qui sont des nombres entiers naturels.

### Définition

- Les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ tels que $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\ldots..\}$
- Les nombres entiers naturels **non nuls** forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathbb{N}*= \{1,2,3,4,5,\ldots..\}$

### Exemples :

- 3 est un entier naturel, on dit que 3 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ et on écrit $3 \in \mathbb{N}$.
- 5 n'est pas un entier naturel, on dit que 5 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$ on écrit $-5 \notin \mathbb{N}$ .
- 4 est un entier naturel non nul, on dit que 4 est appartient à $\mathbb{N}^*$et on écrit $4 \in \mathbb{N}^*$

### Remarque :

- L'ensemble des nombres entiers naturels est infini, signifie que, si $n$ est un entier naturel alors son successeur $n + 1$ est aussi un nombre entier naturel
- Le symbole $\in$ se lit « appartient à »
- Le symbole $\notin$ se lit « n'appartient pas »

### Application ①

Compléter par $\in$; $\notin$

$15\ldots\ldots..\mathbb{N}$ ; $\frac{2\pi}{3}\ldots..\mathbb{N}*$ ; $\sqrt{12}\ldots.\mathbb{N}$ ; $\frac{15}{3}\ldots.\mathbb{N}*$ ; $0\ldots..\mathbb{N}*$

## II. Divisibilité dans $\mathbb{N}$

### 1) Nombres pairs – Nombres impairs

#### a) Définition

Soit $a$ un nombre entier naturel.

∗ On dit que $a$ est un **nombre pair** s'il existe un nombre entier naturel $k$ tel que : $a = 2k$.

∗ On dit que $a$ est un **nombre impair** s'il existe un nombre entier naturel $k$ tel que : $a = 2k + 1$.

### Exemple :

∗ On a : 144 = 2×72, donc 144 est un nombre pair.

∗ On a : 161 = 2×80 + 1, donc 161 est un nombre impair.

#### b) Opérations sur les nombres pairs et les nombres impairs :

***Propriété :***

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels on a :

| Nombre | a | b | $a+b$ | $a-b(a>b)$ | $a\times b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Parité | Pair | Pair | Pair | Pair | Pair |
| | Pair | Impair | Impair | Impair | Pair |
| | Impair | Pair | Impair | Impair | Pair |
| | Impair | Impair | Pair | Pair | Impair |

***Démonstration :***

* *Montrons que si a est pair et b est pair alors $a+b$ est pair.*
  *Si a est pair, alors il existe un entier naturel $k$ tel que $a=2k$ .*
  *Si b est pair, alors il existe un entier naturel $k'$ tel que $b=2k'$ .*

*Par suite $a+b=2k+2k'=2(k+k')=2k"$ aveck" $\in\mathbb{N}$ , d'où $a+b$ est un nombre pair.*

* **Même démarche pour les autres cas.**

***Application②***

1) *Etudier la parité des nombres suivants : 1359+59321 ; $978^2-65^2$ ; $732\times753$*

2) *Soit $n$ un entier naturel ; étudier la parité des nombres suivants :*
$2n+3$ ; $4n^2+2n+5$ ; $1+(n+1)^2+(n+2)^2$

***Théorème*** :

Le produit de deux nombres entiers naturels **consécutifs** est toujours un nombre pair.

***Démonstration :***

*Soit $n$ un entier naturel.*

*Montrons que $n(n+1)$ est un nombre pair.*

***1^er^ cas*** *: si $n$ est **pair** alors $n=2k$*

*Donc $n(n+1)=2k(2k+1)=2(k(2k+1))=2k'$ sachant que $k'\in\mathbb{N}$*

*D'où nest pair*

***2^éme^ cas*** *: si nest **impair** alors $n=2k+1$*

*Donc $n(n+1)=(2k+1)(2k+1+1)=(2k+1)(2k+2)=2[(2k+1)(k+1)]=2k''$ sachant que $k''\in\mathbb{N}$*

*D'où nest pair.*

*D'après les deux cas on peut conclure que $n(n+1)$ est un nombre **pair**, pour tout $n\in\mathbb{N}$*

***Application③ :***

Soit $n$ un entier naturel. Etudier la parité des nombres suivants : $n^2+3n+2$ et $n^2+7n+13$ .

## 2) *Multiple et diviseur d'un nombre entier naturel* :

**Définition** :

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel $k$ tel que $a = k.b$ alors :

$a$ : s'appelle le multiple de $b$

$b$ : s'appelle le diviseur de $a$

$k$ : s'appelle le rapport de $a$ par b

**Exemple** :$30 = 2 \times 15$ : donc 30 : multiple de 15 // 15 : diviseur de 30 // 2 : Le rapport de 30 par 15

**Remarque** :

* 0 est un multiple de tous les nombres entiers naturels.
* 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.

**Application④**

1) Déterminer les diviseurs de 36 et 82.
2) Déterminer les multiples de 3 inférieurs ou égal à 50.

### 3) Critères de divisibilité par 2,3,4,5 et 9

**Propriété**

Soit $n$ un entier naturel. On dit que $n$ est divisible par :

•**2** si son chiffre des unités est :0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8
•**5** si son chiffre des unités est :0 ou 5
•**3** ou **9** si la somme de ses chiffres forme un multiple de 3 ou 9.
•**4** si son chiffre des unités et son chiffre des dizaines forment un multiple de 4.

**Exemples**

- 4725 : divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
- 4725 : divisible par 3 et par 9 car la somme de ses chiffres qui est 4+7+2+5=18 est un multiple de 3 et de 9.
- 1628 : divisible par 4 car 28 est un multiple de 4.
- 1628 divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.

**Application⑤** :

Etudier la divisibilité de 3611790 par 2, 3, 4, 5 et 9

## III. Nombres premiers

☞**Activité** :

Déterminer les diviseurs de 2 , 3 ,5 et17.

Que remarquez-vous ?

**Définition**

Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est dite **premier** s'il possède **deux** diviseurs **1** et **lui-même**.

***Application ⑥*** :

Parmi les nombres suivants ; déterminer ceux qui sont des nombres premiers : 37 ;45 ;67 ;73 ;87

***Remarque*** :

* **1** n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur.
* **2** le seul nombre pair qui est premier.
* Pour étudier la primalité d'un nombre entier naturel $n$ ; on cherche tous les nombres premiers $p$ qui vérifient $p \leq \sqrt{n}$. Si $n$ **est divisible** par l'un de ces nombres alors $n$ n'est pas un nombre premier **sinon** $n$ est premier.

***Exemple*** :

Le nombre 37 est-il premier ?

On a $\sqrt{37} \simeq 6{,}08$ et les nombres premiers inférieur ou égal à $\sqrt{37}$ sont 2, 3 et 5.

Or 37 n'est pas divisible par 2 ; 3 et 5 ; alors 37 est un nombre premier.

***Application ⑦*** :

Etudier la primalité des nombres suivants : 101 ; 137 ; 1563

## IV. Décomposition en produit de facteurs premiers.

***Théorème***

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple :

$30 = 2 \times 3 \times 5$ est une décomposition de 30 en produit de facteurs premiers.

***Application ⑧*** :

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 48 ; 612 ; 1530 ; 3240

## V. PGCD – PPCM

### 1) PGCD

***a) Définition*** :

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels non nuls.

Le plus grand commun diviseur de $a$ et $b$ s'appelle le PGCD de $a$ et $b$ et se note $PGCD(a,b)$ ou $a \wedge b$

***Remarque*** :

Comme 1 est un diviseur de tous nombre a et b de $\mathbb{N}$ ; alors $PGCD(a,b) \geq 1$

***Application ⑨***

Déterminer les diviseurs de 36 et 84 puis déduire $PGCD(36,84)$

***Théorème***

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels.

Le $PGCD(a, b)$ est le **produit** de facteurs premiers **communs** apparaissent à la fois dans la décomposition de $a$ et $b$et affectés à une **petite** puissance.

***Exemple*** :

$a = 132$ et $b = 120$

On a $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ ;

par conséquent $PGCD(132,120) = 2^2 \times 3 = 12$

***Application ⑩*** :

Déterminer $PGCD(180,174)$ et $PGCD(156,495)$

## ***b) Deux nombres entiers naturels premiers entre eux***

***Théorème***

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels.

On dit que $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a, b) = 1$.

***Application*** : Montrer que 37 et 8 sont premiers entre eux.

## 2) ***PPCM***

***Définition***

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels non nuls.

Le plus petit commun multiple **non nul** de $a$ et $b$s'appelle le PPCM de $a$ et $b$ et se note $PPCM(a, b)$ ou $a \vee b$

***Application ①①*** : Déterminer $PPCM(12,15)$

***Théorème***

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels.

Le $PPCM(a, b)$ est le **produit** de facteurs premiers **communs** et **non communs** apparaissent dans la décomposition de $a$ et $b$et affectés à une **grande** puissance.

***Application ①②***

1) Décomposer 45 et 120 en produit de facteurs premiers, puis déduire $PPCM(45,120)$ .