Examen blanc

PC-SVT-ST

Prof:Abdelwahed

Exercice 1 ; 2,5 pts

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{2}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3 - U_n} \end{cases}$

1 **a** Montrer par récurrence que : $1 < U_n < 2$ pour tout entier naturel n . (0,5 pt)

b Vérifier que : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$ pour tout entier naturel n . (0,5 pt)

c Montrer que la suite (U_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente . (0,5 pt)

2 Soit (V_n) la suite numérique définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}$ pour tout entier naturel n .

a Montrer que (V_n) est une suite géométrique. (0,25 pt)

b En déduire que : $U_n = \dfrac{-1}{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n} + 2$ pour tout entier naturel n. (0,5 pt)

c Déterminer la limite de la suite (U_n) . (0,25 pt)

Exercice 2 ; 2,5 pts

1 **a** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$. (0,75 pt)

b Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $a = 4 + 4i$ et en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif. (0,5 pt)

2 On considère les points A et B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i$; $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$

a Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation $R(C; \frac{\pi}{2})$.Démontrer que $z' = iz + 7 + i$. (0,5 pt)

b Vérifier que l'affixe du point D l'image de A par R est : $d = 3 + 5i$. (0,25 pt)

c Demontrer que l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC). (0,5 pt)

Exercice 3 ; 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, On considère les points : $A(2,1,3)$; $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$

1 **a** Vérifier que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. (0,5 pt)

b En déduire que : $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne de plan (ABC). (0,5 pt)

2 Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$.

a Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $R = 6$. (0,75 pt)

b Montrer que la distance du point Ω au plan (ABC) est $d(\Omega,(ABC)) = 3$. (0,25 pt)

c En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon de rayon $r = 3\sqrt{3}$. (0,5 pt)

d Montrer que le point B est le centre du cercle (Γ). (0,5 pt)

Exercice 4 ; 3 pts

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher :

— Six boules blanches portant les nombres : $0, 0, 0, 1, 1, 2$.

— deux boules noires portant les nombres : $0, 1$.

Bon courage

On tire au hasard , simultanément , deux boule de l'urne .

Soient A l'événement "Les deux boules tirées sont de même couleur " et B l'événement "Le produit des deux nombres obtenus est nul "

1 Montrer que : $\mathrm{P}(A) = \dfrac{4}{7}$ et que : $\mathrm{P}(B) = \dfrac{11}{14}$. (1,5 pt)

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des chiffres obtenus .

- **a** Vérifier que : $\mathrm{X}(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. (0,5 pt)
- **b** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (1 pt)

Exercice 5 ; 9 pts

Première partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{-x+1}$

1 Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. (0,5 pt)

2
- **a** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (x-1)\,e^{-x+1}$. (0,5 pt)
- **b** Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- **c** En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 0$. (0,5 pt)

Deuxième partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\left(1 + e^{1-x}\right)$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(||\vec{\imath}|| = 1cm)$

1
- **a** Vérifier que : $\forall x \in]1+\infty[\,, \quad f(x) = (x+1) + \dfrac{x+1}{1-x}(1-x)\,e^{(1-x)}$. (0,25 pt)
- **b** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (0,25 pt)
- **c** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1)$, puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$. (0,5 pt)

2
- **a** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. (0,75 pt)
- **b** En déduire que (C_f) admet ,en $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. (0,25 pt)

3
- **a** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$. (0,75 pt)
- **b** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

4 Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnés $(1\,,4)$. (0,5 pt)

5 Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en $A(-1\,,0)$ et coupe l'axe des ordonnés en $B(0\,,e+1)$. (0,5 pt)

6 Tracer dans le même repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la droite (D) et la courbe (C_f). (1 pt)

7
- **a** Montrer que : $\int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x = 2$. (0,25 pt)
- **b** En utilisant une intégration par parties , Montrer que : $\int_{-1}^{1}(x+1)\,e^{1-x}\mathrm{d}x = e^2 - 3$. (0,75 pt)
- **c** Calculer ,en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$. (0,5 pt)

Bon courage