Page	Examen National Blanc N 6	ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵡⴰⵏ ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ
1/4	Prof : Haddad Abdelwahed	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

Matière	Mathématiques	La durée : 3 Heures
Filière et Option	Sciences Expérimentales Avec Leurs Options	Le coefficient : 7

EXERCICE 01 : (2pts)

0. 5pts 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 + 2x - 3 = 0$.

0.75pts 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^x - \frac{3}{e^x} + 2 = 0$.

0.75pts 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x+1} - e^{-2x+4} \geq 0$.

EXERCICE 02 : (5pts)

0.75pts 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 7 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$,On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives : $a = i$, $b = 3i$, $c = \sqrt{3} + 2i$ et $d = \sqrt{3} - 2i$.

0. 5pts a) Montre que : $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

0.75pts b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral .

0.75pts 2) Montrer que le point C est l'image du point D par la translation T de vecteur $\vec{W}(4i)$.

3) Soit R la rotation de centre $\Omega(\sqrt{3} - 2)$ et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ .Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R .

0. 5pts a) Montrer que : $z' = -iz + \sqrt{3} - 2 + (\sqrt{3} - 2)i$.

0. 5pts b) Montrer que : $R(C) = D$

0.75pts 4) Déterminer e l'affixe du point E tel que le quadrilatère $CED\Omega$ soit un parallélogramme .

0. 5pts 5) Montrer que le quadrilatère $CED\Omega$ est un carré .

EXERCICE 03 : (2. 5pts)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{3}{4}\ et\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

0. 5pts 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 < u_n < 1$.

0.25pts 2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 3)}{u_n + 4}$$

0.5pts Puis en déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*): v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

0.5pts a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

0.5pts b) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}$$

0.25pts c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Problème : (10. 5pts)

Partie1 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + xlnx$$

0.25pts 1) Montrer que : $g'(x) = ln(x) + 1$,pour tout $x \in]0; +\infty[$

0. 5pts 2) En déduire que : g est décroissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

0. 5pts 3) Vérifier que $g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$ et montrer que : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$

0.25pts 4) En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$.

0. 5pts 5) a- Montrer que $ln(x)$ et $x - 1$ ont le même signe sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$

0.25pts b- En déduire que : $(x - 1)ln(x) \geq 0$,pour tout $x \in]0; +\infty[$

Partie2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = ln^2(x) + \frac{ln(x)}{x} + 1$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.(unité 1cm)

0.25pts 1) a- Montrer que : $f(x) = ln^2(x)\left(1 + \frac{1}{xln(x)}\right) + 1$,pour tout $x \in]0; 1[$.

0. 5pts b- Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ .Interpréter graphiquement le résultat.

0.25pts 2) a-Monter que : $\frac{ln^2(x)}{x} = 4\left(\frac{ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$,pour tout $x \in]0; +\infty[$.

0.25pts b- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln^2(x)}{x} = 0$.

0. 5pts c- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

0.25pts — d- Interpréter graphiquement ce résultat .

0. 5pts — 3) a- Montrer que : $f'(x) = \frac{(x-1)ln(x)+g(x)}{x^2}$,pour tout $x \in]0; +\infty[$

0. 5pts — b- Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

0. 5pts — 4) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 1 .

0. 5pts — 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

1pts — 6) Construire (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie3 :

0.5pts — 1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J à déterminer .

0.5pts — 2) Tracer en vert $(C_{f^{-1}})$,la courbe représentative de la fonction f^{-1} ,dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0. 5pts — 3) Vérifier que $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - e$,montrer que f^{-1} est dérivable en $2 - e$ et calculer : $(f^{-1})'(2 - e)$.

Partie4 :

0.25pts — 1) Montrer que : $\int_1^e \frac{ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$.

0.5pts — 2) Montrer que la fonction : $H: x \mapsto xln(x) - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ et montrer que : $\int_1^e ln(x)\, dx = 1$.

0.5pts — 3) Par un intégration par parties ,Montrer que : $\int_1^e ln^2(x) dx = e - 2$.

0.5pts — 4) En déduire que : $\int_1^e f(x)\, dx = 2e - \frac{5}{2}$.