Page	Examen National Blanc N 5	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
1/4	Prof : Haddad Abdelwahed	

Matière	Mathématiques	La durée : 3 Heures
Filière et Option	**Sciences Expérimentales Avec Leurs Options**	**Le coefficient : 7**

EXERCICE 01 : $(1.5pts)$

Soit h la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par $h(x)=\frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}$

0.75pts — 1) Monter que la fonction $H : x \mapsto e^x-\frac{1}{2}\left(ln(1+e^x)-ln(1-e^x)\right)$ est une primitive de la fonction h sur $]-\infty;0[$.

0.75pts — 2) En déduire que : $\int_{-2}^{ln\left(\frac{1}{2}\right)} h(x)dx=\frac{1}{2}\left(1-ln(3)+ln\left(\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}\right)\right)-e^{-2}$.

EXERCICE 02 : $(5pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^3-4z^2+8z-8=0$.

0.5pts — a) Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C}\quad z^3-4z^2+8z-8=(z-2)(z^2-2z+4)$.

0.75pts — b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$,On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $a=1-i\sqrt{3}$, $b=1+i\sqrt{3}$, $c=2$.

0.5pts — a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes a et b .

0.5pts — b) En déduire que : $a^{2016}+b^{2016}=c^{2017}$.

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

0.75pts — a) Montrer que $R(A)=B$.

0.5pts — b) Vérifier que : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

0.5pts — c) En déduire que le quadrilatère $OACB$ est un losange .

1pts — 3) Montrer que l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tel que $|Z-1+i\sqrt{3}|=|Z-1-i\sqrt{3}|$ est la droite (OC).

EXERCICE 03 : (2.5pts)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \; et \; (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n}$$

0.5pts 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n$

0.5pts 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$

0.5pts 3) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

0.5pts 4) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

0.5pts 5) Soit (w_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; w_n = \sqrt{2u_n + 1}$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Problème : (11pts)

Partie1 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x + 1 + lnx$$

0. 5pts 1) Montrer que : $g'(x) = \frac{1-x}{x}$,pour tout $x \in]0; +\infty[$

0. 5pts 2) En déduire que : g est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

0. 5pts 3) En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g(x) \leq 0$.

Partie2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = (1 + ln(x))^2 - 2x$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.(unité 1cm)

0. 5pts 4) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ .Interpréter graphiquement le résultat.

0. 5pts 5) a-Monter que : $f(x) = x\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right)$,pour tout $x \in]0; +\infty[$.

0. 5pts b- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

0.75pts c- Montrer que la courbe (C_f) admet ,au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction aymptotique la droite (Δ) d'équation $y = -2x$.

0. 5pts d- Montrer que (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]0 ; +\infty[$

0.75pts 3) a- Montrer que : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$,pour tout $x \in]0; +\infty[$

0. 5pts b- Interpréter graphiquement le résultat $f'(1) = 0$

0. 5pts c-Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$

0.5pts

4) Montrer que la droite (Δ) est tangente à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

0. 5pts

5) a- Montrer que : $f''(x) = \frac{-2ln(x)}{x^2}$,pour tout $x \in]0;+\infty[$

0. 5pts

b- En déduire que $I(1\,;-1)$ est l'unique point d'inflexion de $\left(C_f\right)$.

0.75pts

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e^2};\frac{1}{e}\right[$.

0.75pts

7) Construire (Δ) et $\left(C_f\right)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie3 :

Soit h la restriction de la fonction f sur $]0;1[$

0.75pts

1) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1}définie sur un intervalle J à déterminer .

0.5pts

2) Tracer en vert $\left(C_{h^{-1}}\right)$,la courbe représentative de la fonction h^{-1} ,dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.75pts

3) Vérifier que $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2}{e}$,Justifier la dérivabilité de h^{-1} en $\frac{-2}{e}$ et montrer que : $(h^{-1})'\left(\frac{-2}{e}\right) = \frac{-1}{2}$