# Examen National Blanc N 4

Prof : Haddad Abdelwahed

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵏⴰⵎⴰⵙ
ⴷ ⵓⵚⵍⴰⵏ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

| Matière | Mathématiques | La durée : 3 Heures |
|---|---|---|
| Filière et Option | Sciences Expérimentales Avec Leurs Options | Le coefficient : 7 |

## EXERCICE 01 : (3pts)

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \ \ et\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$$

0. 5pts — 1) Montrer que par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$ .

0.75pts — 2) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et qu'elle est convergente .

3) Soit $(v_n)$ la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \ v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

0. 5pts — a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ .

0. 5pts — b) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{\frac{-n}{2} - 1} + 2$$

0.25pts — c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

0. 5pt — 4) Soit $(w_n)$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n = ln(u_n)$ .Déterminer $\lim_{n\to+\infty} w_n$ .

---

## EXERCICE 02 : (5pts)

0.75pts — 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ ,On considère les points $A$ , $B$ , $C$ et $D$ d'affixes respectives : $a = 1 + i$ , $b = \sqrt{3} + i$ , $c = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$ et $d = \sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i$.

0. 5pts — a-Vérifier que : $c = ab$ et $d = \frac{4a}{b}$

1pts — b-Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $c$ et $d$ .

1pts — c-En déduire que : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3) Soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

0.75pts — a- Montrer que : $R(D) = C$

0.5pts — b-En déduire que le triangle $ODC$ est équilatéral .

0.5pts — 4) Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tel que : $|Z - 1 - i| = \sqrt{2}$ .

---

## EXERCICE 03 : (2pts)

0.5pts — 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 + x - 6 = 0$.

0.75pts — 2) Résoudre dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'équation suivante : $ln^2(x) + ln(x) - 6 \geq 0$

0.75pts — 3) Montrer que : $ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}ln(2)$

---

## Problème : (10pts)

**Partie1 :**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2e^x$

Et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.(unité 1cm)

0.25pts — 1) a- Monter que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .

0. 5pts — b- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et en déduire que la courbe $(C_f)$ admet ,au voisinage de $+\infty$ , une branche parabolique dont on précisera sa direction.

0.25pts — 2) a- Monter que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2e^x - 2xe^x + e^x$

0. 5pts — b- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement ce résultat.

0.75pts — 3) a- Montrer que : $f'(x) = (x^2-1)e^x$ , pour tout $x \in \mathbb{R}$ .

0. 5pts — b-Monter que la fonction $f$ est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;-1]$ *et* $[1\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

0.25pts — c- Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ .

0.75pts — 4) Etudier l'intersection de la courbe $(C_f)$ avec les axes du repère.

0. 5pts — 5) a- Montrer que : $f''(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ , pour tout $x \in \mathbb{R}$ .

0. 5pts — b-En déduire que la courbe $(C_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$ .

1pts — 6) Construire $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

$\left(\textit{On donnera} : \ -1-\sqrt{2} \approx 2.4\,; -1+\sqrt{2} \approx 0.4\,; f(-1-\sqrt{2}) \approx 1 \ \textit{et} \ f(-1+\sqrt{2}) \approx 0.5\right)$

0.75pts — 7) Utiliser la courbe $(C_f)$ pour donner le nombre de solution de l'équation : $x^2 = 2x - 1 + e^{-x}$

**Partie2 :**

**1) Soit $h$ la restriction de la fonction $f$ sur l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$ .**

0.75pts — **a- Montrer que la fonction $h$ admet une fonction réciproque $h^{-1}$définie sur $J = [0\,;\,+\infty[$**

0.75pts — **b- Vérifier que $h(2) = e^2$ et montrer que : $(h^{-1})'(e^2) = \frac{1}{3e^2}$ .**

0. 5pts — **d- Tracer en vert $\left(C_{h^{-1}}\right)$ ,la courbe représentative de la fonction $h^{-1}$ ,dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ .**

**2) a- Monter que la fonction $H : x \longmapsto (x-1)e^x$ est une primitive de $h : x \longmapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ et**

0. 5pts — **calculer $\int_0^1 xe^x dx$.**

0. 5pts — **b-Par une intégration par parties monter que : $\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2$**

0. 5pts — **b- En déduire que : $\int_0^1 f(x)dx = 2e - 5.$**