Page	Examen National Blanc N 3	
1/4	Prof : Haddad Abdelwahed	ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ ... المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

Matière	Mathématiques	La durée : 3 Heures
Filière et Option	Sciences Expérimentales Avec Leurs Options	Le coefficient : 7

EXERCICE 01 : $(2.5pts)$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \ et \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

0.5pts 1) Montrer que par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 1$.

0.75pts 2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(1 - u_n)}{u_n + 2}$$

Puis en déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

0. 5pts a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

0.25pts b) Exprimer v_n en fonction de n.

0.25pts c) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}$$

0.25pts d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 02 : $(5pts)$

0.75pts 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$,On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$ .Soit $\overrightarrow{W}$ le vecteur d'affixe $w = 2$.

0.5pts a) Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes a et b .

0.5pts b) En déduire que a^6 et b^6 sont des nombres réels négatifs.

3) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{W}$.

0.5pts a) Déterminer c et d ,les affixes respectives des points C et D tels que : $T(A) = C$ et $T(B) = D$.

0.5pts b) Montrer que : $\frac{d-b}{a-b} = -i$.

0.5pts c) En déduire que : $AB = DB$ et que : $\overline{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})} \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

0.5pts d) En déduire que le quadrilatère $ACDB$ est un carré.

0.5pts 4) Montrer que l'ensemble des points $M(Z)$ tel que $|Z-\sqrt{3}-i| = |Z-\sqrt{3}-2+i|$ est la droite (BC).

0.75pts 5) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ .En utilisant la formule d'Euler, Montrer que : $cos^4(\theta) = \frac{1}{8}cos(4\theta) + \frac{1}{2}cos(2\theta) + \frac{3}{8}$

EXERCICE 03 : (2pts)

0. 5pts 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 8x + 15 = 0$.

2) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ les équations suivantes :

0.75pts a) $ln(2x-3) - ln(x) = ln(x+2) - ln(5)$.

0.75pts b) $ln^2(x) - 8ln(x) + 15 = 0$.

Problème : (10.5pts)

Partie1 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - lnx$$

0.25pts 1) Montrer que : $g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$,pour tout $x \in]0;+\infty[$

0. 5pts 2) En déduire que : g est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

0. 5pts 3) Montrer que : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + ln(2)$ et vérifier que : $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25pts 4) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g(x) > 0$.

Partie2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{ln(x)}{x} + 2x - 2$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.(unité 1cm)

0. 5pts 1) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ .Interpréter graphiquement le résultat.

0.25pts 2) a-Monter que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(0. 5pts) b-Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-2)$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

(0.25pts) c- Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) .

3) (0. 5pts) a- Montrer que : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$,pour tout $x\in\,]0;+\infty[$.

(0.25pts) b- Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4) (0. 5pts) a- Montrer que : $f''(x)=\frac{2ln(x)-3}{x^3}$,pour tout $x\in\,]0;+\infty[$.

(0.25pts) b- En déduire que (C_f) admet un unique point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$

5) (0. 5pts) Montrer que l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 est $y=3x-3$

6) (1pts) Construire (T) , (Δ) et (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. $\left(On\ prendra:\ e^{\frac{3}{2}}\approx 4.5\ et\ f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\approx 7.3\right)$

7) (0. 5pts) Résoudre, graphiquement, sur $]0;+\infty[$ l'inéquation $f(x)\geq 0$.

8) (0. 5pts) a-Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur $\mathbb{R}$

(0.25pts) b-Déterminer les variations de la fonction f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

(0. 5pts) c-Vérifier que $f(e)=\frac{2e^2-2e+1}{e}$,Justifier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{2e^2-2e+1}{e}$ et montrer que : $(f^{-1})'\left(\frac{2e^2-2e+1}{e}\right)=\frac{1}{2}$.

(0. 5pts) d- Tracer en vert $(C_{f^{-1}})$,la courbe représentative de la fonction f^{-1} ,dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9) (0.25pts) a- Monter que la fonction $H: x\longmapsto \frac{ln^2(x)}{2}$ est une primitive de $h: x\longmapsto\frac{ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

(0.25pts) b- Calculer $\int_1^e \frac{ln(x)}{x}dx$.

(0.25pts) c- Montrer que : $\int_1^e f(x)dx=e^2-2e+\frac{3}{2}$

Partie 03 :

Soit h la fonction numérique définie sur D_h par : $h(x)=f(|x|)$

1) (0. 5pts) Déterminer D_h le domaine de d définition de h , puis étudier la parité de la fonction h

2) (0. 5pts) Tracer en rouge (C_h) , la courbe représentative de la fonction h ,dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$