SIMILI DE MATHEMATIQUE

Durée :2H

Exercice 1 :(5pts)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par :** $u_0 = \frac{1}{2}$ **et** $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5}$ **pour tout n de** $\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 **et** u_2 **(0.5)**

2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ **:** $u_n \prec \frac{3}{4}$ **(0.5)**

3.a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{3}{4}\right)$ **(0.5)**

3.b. En déduire que $(u_n)_n$ **est une suite croissante. (0.5)**

4. Déduire que la suite $(u_n)_n$ **est convergente. (0.5)**

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$ **:** $v_n = u_n - \frac{3}{4}$

5.a. Calculer v_0 **. (0.25)**

5.b. Montrer que $(v_n)_n$ **est une suite géométrique de raison** $\frac{1}{5}$ **. (0.75)**

5.c. Donner v_n **en fonction de n . (0.5)**

5.d. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ **;** $u_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4}$ **(0.5)**

6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **(0.5)**

Exercice 2 : (5pts)

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules blanches, deux boules noires et une boule rouge.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne, et on considére les évènements suivants :

A : les boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux.

B : Parmi les boules tirées il y a une boule rouge.

C : Obtenir au moins une boule blanche.

1.Calculer la probabilité des évènements A, B et C . (1)

2.a. Montrer que : $p(B \cap C) = \frac{14}{35}$. **(1)**

2.b. Les deux événements B et C sont – ils indépendants ? (0.5)

2.c. Sachant que l'évènement B est réalisé calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche. (0.5)

3.Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs de boules tirées.

3.a. Vérifier que les valeurs prises par X sont 1,2 et 3. (0.25)

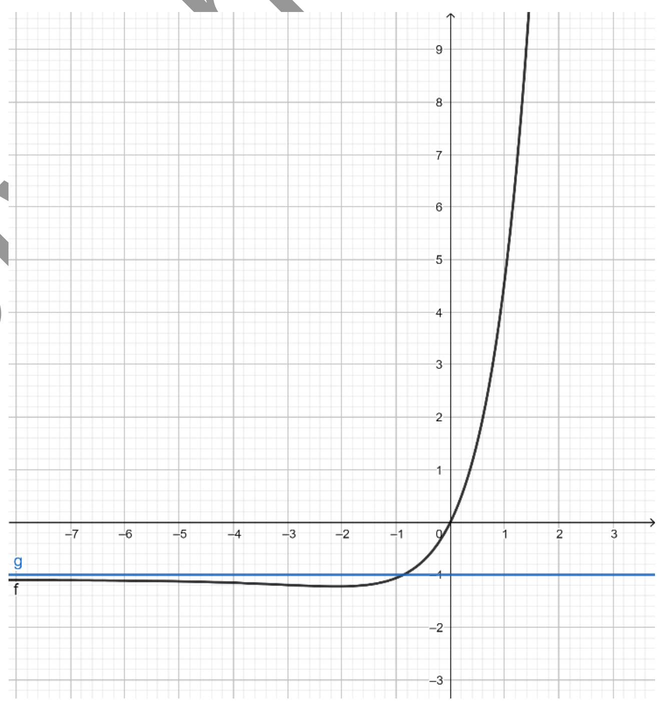
3.b. Montrer que : $p(X=2) = \frac{23}{35}$ **,puis on déduire la loi de probabilité de X . (1.5)**

3.c. Calculer l'espérance mathématique de X . (0.25)

Exercice 3 :(10pts)

Partie1 :

On considére la fonction g **définie sur** $\mathbb{R}$ **par sa courbe** (C_g) **représentative ci-dessous dans un repère orthonormé** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ **.**



1.Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$, **(0.75)**

2. Dresser le tableau de variations de g **. (0.75)**

3. Déduire que $g(x) \geq 0$ **pour tout** x **de** $[0;+\infty[$ **et**

$g(x) \leq 0$ **pour tout** x **de** $]-\infty;0]$**. (0.75)**

4. On suppose que dans la suite de l'exercice $g(x) = (x+1)e^x - 1$

Partie 2 :

On considére la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $f(x) = x(e^x - 1) + 1$

Soit (Cf) **la courbe représentative de la fonction** f **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et montrer que la droite** (Δ) **d'équation** $y = -x+1$ **est une asymptote à la courbe** (C_f)**. (0.75)**

1.b.Etudier les positions relatives de la courbe (C_f) **et la droite** (Δ)**. (0.75)**

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ **et interpréter géométriquement ce résultat.** **(0,75)**

3. Vérifier que pour tout x **de** $\mathbb{R}$ **:** $f'(x) = g(x)$ **(1)**

et dresser le tableau de variations de f **.** **(0,75)**

4.Déterminer l'équation de la tangente (T) **la courbe** (C_f) **au point d'abscisse 0.** **(0.5)**

5.Construire la courbe (C_f) **.** **(1)**

6.a. En utilisant une intégration par partie, montrer que $\int_0^1 xe^x dx = 1$ **(1)**

6.b.Montrer que l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) **et les droites d' équations** $x = 0$ **et** $x = 1$ **est** $\frac{3}{2}$ **ua** **(1.25)**