Exercices corrigés

-Fonction logarithme-

Exercice 1

I. Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + x(\ln x)^2 & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue à droite en 0.
3. Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
4. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement les résultats.
5. a. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f'(x) = (1 + \ln x)^2$.
   b. Calculer $f'\left(e^{-1}\right)$, puis interpréter géométriquement le résultat.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
6. Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse e^{-1}.
7. Montrer que la droite (T) d'équation $y = x$ est tangente à (C_f) au point d'abscisse 1
8. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Calculer $f^{-1}(1)$ et $\left(f^{-1}\right)'(1)$
9. Construire (T), (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

10 Montrer que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$ est primitive de la fonction $h : x \mapsto x\ln(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

II. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-1} < u_n < 1$.

2 Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Correction

I.

1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\} \cup \{0\} = [0;+\infty[$

2 On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x + x(\ln x)^2 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}^2 + \sqrt{x}^2\left(\ln\sqrt{x}^2\right)^2 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}^2 + \left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2 \\
&= \lim_{t\to 0^+} t^2 + 4(t\ln t)^2 \qquad \text{posons } t = \sqrt{x} \\
&= 0 = f(0)
\end{aligned}$$

Car : $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ et $\lim_{t\to 0^+} t^2 = 0$

Donc f est continue à droite en 0.

3 $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + x(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(1 + (\ln x)^2\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 + (\ln x)^2 = +\infty$

Car : $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Comme : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc (C_f) admet une demi-tangente verticale à droite au point $(0;0)$ dirigée vers le haut.

4 On a : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x + x(\ln x)^2 = +\infty$ Car : $\lim_{x\to +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

Et on a : $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x + x(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1 + (\ln x)^2\right)}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 + (\ln x)^2 = +\infty$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

5 **a** Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que somme et produit de fonctions dérivables.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + (x\ln x)^2\right)' \\ &= 1 + x'(\ln x)^2 + x\left((\ln x)^2\right)' \\ &= 1 + (\ln x)^2 + x \times 2 \times \ln' x \times \ln x \\ &= 1 + (\ln x)^2 + 2\ln x \\ &= (1+\ln x)^2 \end{aligned}$$

b On a : $f'\left(e^{-1}\right) = \left(1 + \ln\left(e^{-1}\right)\right)^2 = (1+(-1))^2 = 0$.

Donc (C_f) admet une tangente horizontale au pont d'abscisse e^{-1}

c On a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = (1+\ln x)^2 \geq 0$

Donc f est croissante sur $]0;+\infty[$. Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

6 La fonction f' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(1+\ln x)^2\right]' \\ &= 2(1+\ln x)'(1+\ln x) \\ &= 2 \times \frac{1}{x}(1+\ln x) \\ &= \frac{2(1+\ln x)}{x} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

Tableau de signe de $f''(x)$:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On a : $f''\left(e^{-1}\right) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de e^{-1}, Donc le point $\left(e^{-1}, f\left(e^{-1}\right)\right)$ est un point d'inflexion de (C_f), avec $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1} + e^{-1}\left(\ln\left(e^{-1}\right)\right)^2 = 2e^{-1}$

7 On a : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \times (x+1) + x = x$

Donc $(T) : y = x$ est l'équation la tangente à (C_f) au point d'abscisses 1

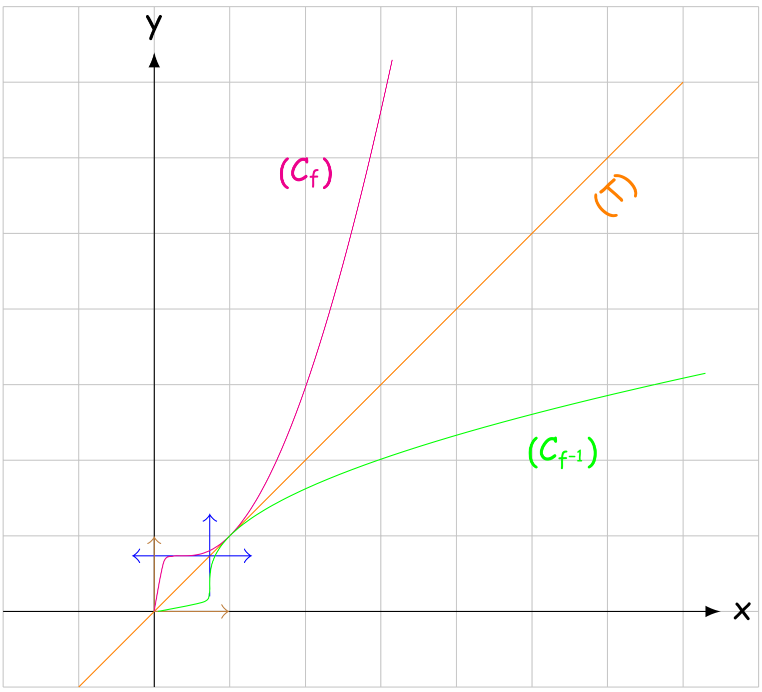
8 **a** La fonction g est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (car elle est dérivable sur cet intervalle) et comme f et continue à droite en 0, donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$
De plus f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$ tel que :

$$\begin{aligned} J &= f(I) \\ &= f\left([0; +\infty[\right) \\ &= \left[f(0); \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [0; +\infty[\end{aligned}$$

b On a : $f(1) = 1$ alors $f^{-1}(1) = 1$

La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en 1. Donc :
$\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \dfrac{1}{f'(1)} = 1$

9 Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$:



10 La fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que produit de fonctions dérivables.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)\right]' \\ &= \frac{1}{2}(x^2)'\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)' \\ &= x\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x} \\ &= x\ln(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x \\ &= x\ln(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction H est une primitive de la fonction h sur $]0;+\infty[$.

II.

1
- Pour $n = 0$

  On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $e^{-1} < \frac{1}{2} < 1$, donc la proposition est vraie pour $n = 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$

  On suppose que $e^{-1} < u_n < 1$ et on montre que $e^{-1} < u_{n+1} < 1$

  On a : f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ en particulier sur $\left]e^{-1};1\right[$

  et comme $e^{-1} < u_n < 1$ alors $f\left(e^{-1}\right) < f(u_n) < f(1)$

  donc $2e^{-1} < u_{n+1} < 1$, par suite $e^{-1} < u_{n+1} < 1$
- Donc d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N});\ e^{-1} < u_n < 1$

2 On a : $(\forall x \in]0;+\infty[);\ f(x)-x = x+x(\ln x)^2-x = x(\ln x)^2 \geq 0$

et comme $u_n \in \left]e^{-1};1\right[$ et $\left]e^{-1};1\right[\subset]0;+\infty[$, alors $f(u_n)-u_n \geq 0$, par suite $u_{n+1}-u_n \geq 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

3 La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente.

De plus : f est continue sur $\left]e^{-1};1\right[$ et $f\left(\left]e^{-1};1\right[\right) = \left]2e^{-1};1\right[\subset \left]e^{-1};1\right[$

Donc la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $\left]e^{-1};1\right[$.

Soit $x \in \left]e^{-1};1\right[$. On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x+x(\ln x)^2 = x \Leftrightarrow x(\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Or, $0 \notin \left]e^{-1};1\right[$, par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 2

I. Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2 Montrer que f est continue à droite en 0.

3 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

4 Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

5 Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement les résultats.

6 **a** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+ - \{1\})$; $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$

b Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser la tableau de variations de f.

7 **a** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$; $f''(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x\,(\ln(x))^3}$

b Étudier la concavité de (C_f), puis montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

8 **a** Résoudre dans D_f l'équation $f(x) = x$.

b En déduire la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

9 Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [e; +\infty[$.

a Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$

10 Construire (Δ), (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

II. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Correction

I.

1 On a :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \text{ et } x \neq 1\} \cup \{0\} \\ &= [0; 1[\cup]1; +\infty[\end{aligned}$$

2 On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} x \times \dfrac{1}{\ln(x)} = 0 = f(0)$

Car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

Donc f est continue à droite en 0.

3 On a : = $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0, c'est-à-dire (C_f) admet une demi-tangente horizontale à droite au point (0; 0).

4

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{\ln(x)} = -\infty$ Car $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(x) = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$ Car $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) = 0^+$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

Donc (C_f) admet une asymptote verticale à droite et à gauche en 1 d'équation $x = 1$.

5

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\ln(x)}{x}} = +\infty$ Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

6 **a** La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable et ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$

La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$

Donc f est dérivable sur chacun des intervalle $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$, en tant que quotient de deux fonctions dérivables.

Soit $x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]' \\ &= \frac{x'\ln(x) - x\,(\ln(x))'}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\ln(x) - x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

et comme f est dérivable à droite en 0, alors :

$$(\forall x \in \left[0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[)\ ,\ f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$$

b On a : $(\forall x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[)$; $(\ln(x))^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x) - 1$.

Soit $x \in (\left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[)$. On a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

- On a : $(\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1;e\right[)$, $\ln(x) - 1 < 0$ et $(\ln(x))^2 > 0$
  Donc : $(\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1;e\right[)$, $f'(x) < 0$, par suite f est strictement décroissante sur $\left[0;1\right[$
- Et on a : $(\forall x \in \left[e,+\infty\right[)$, $\ln(x) - 1 \geq 0$ et $(\ln(x))^2 \geq 0$
  Donc : $(\forall x \in \left[e;+\infty\right[)$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(e) = 0$, par suite f est strictement croissante sur $\left[e;+\infty\right[$

Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

7 **a** La fonction f' est dérivable sur chacun des intervalles $\left]0;1\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$f''(x) = \left[\frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}\right]'$$
$$= \frac{(\ln(x)-1)' \times (\ln(x))^2 - (\ln(x)-1) \times \left((\ln(x))^2\right)'}{(\ln(x))^4}$$
$$= \frac{\frac{1}{x} \times (\ln(x))^2 - (\ln(x)-1) \times 2\ln'(x) \times \ln(x)}{(\ln(x))^4}$$
$$= \frac{\frac{1}{x} \times (\ln(x))^2 - 2(\ln(x)-1)\ln(x)}{(\ln(x))^4}$$
$$= \frac{\frac{1}{x}\ln(x)\left[\ln(x) - 2(\ln(x)-1)\right]}{(\ln(x))^4}$$
$$= \frac{\ln(x) - 2\ln(x) + 2}{x(\ln(x))^3}$$
$$= \frac{2-\ln(x)}{x(\ln(x))^3}$$

b On a : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[)$; $x > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui de $\frac{2-\ln(x)}{(\ln(x))^3}$.

Soit $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$. On a :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

On a :

- $(\forall x \in]0;1[)$; $2-\ln(x) > 0$ et $(\ln(x))^3 < 0$, par suite $f''(x) < 0$
- $(\forall x \in]1;e])$; $2-\ln(x) \geq 0$ et $(\ln(x))^3 > 0$, par suite $f''(x) \geq 0$
- $(\forall x \in]e;+\infty[)$; $2-\ln(x) < 0$ et $(\ln(x))^3 > 0$, par suite $f''(x) < 0$

Ainsi le tableau de concavité :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$					P.I		

Ainsi (C_f) admet un unique point d'inflexion de coordonnés $I\left(e^2; f\left(e^2\right)\right)$. avec $f\left(e^2\right) = \dfrac{e^2}{2}$

8 **a** Soit $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

et comme $f(0) = 0$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \{0; 1\}$

b On a : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[)$; $f(x) - x = \dfrac{x}{\ln(x)} - x = x\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - 1\right) = x\left(\dfrac{1-\ln(x)}{\ln(x)}\right)$

Comme $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[)$; $x > 0$, donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $\dfrac{1-\ln(x)}{\ln(x)}$

On a donc le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$		$+$	0	$-$	
position relative		(C_f) est au dessous de (Δ)		(C_f) est au dessus de (Δ)	$(e; e)$	(C_f) est au dessous de (Δ)	

9 **a** La fonction h est continue sur l'intervalle $[e, +\infty[$ (car elle est dérivable sur cet intervalle) et strictement croissante sur $[e; +\infty[$.

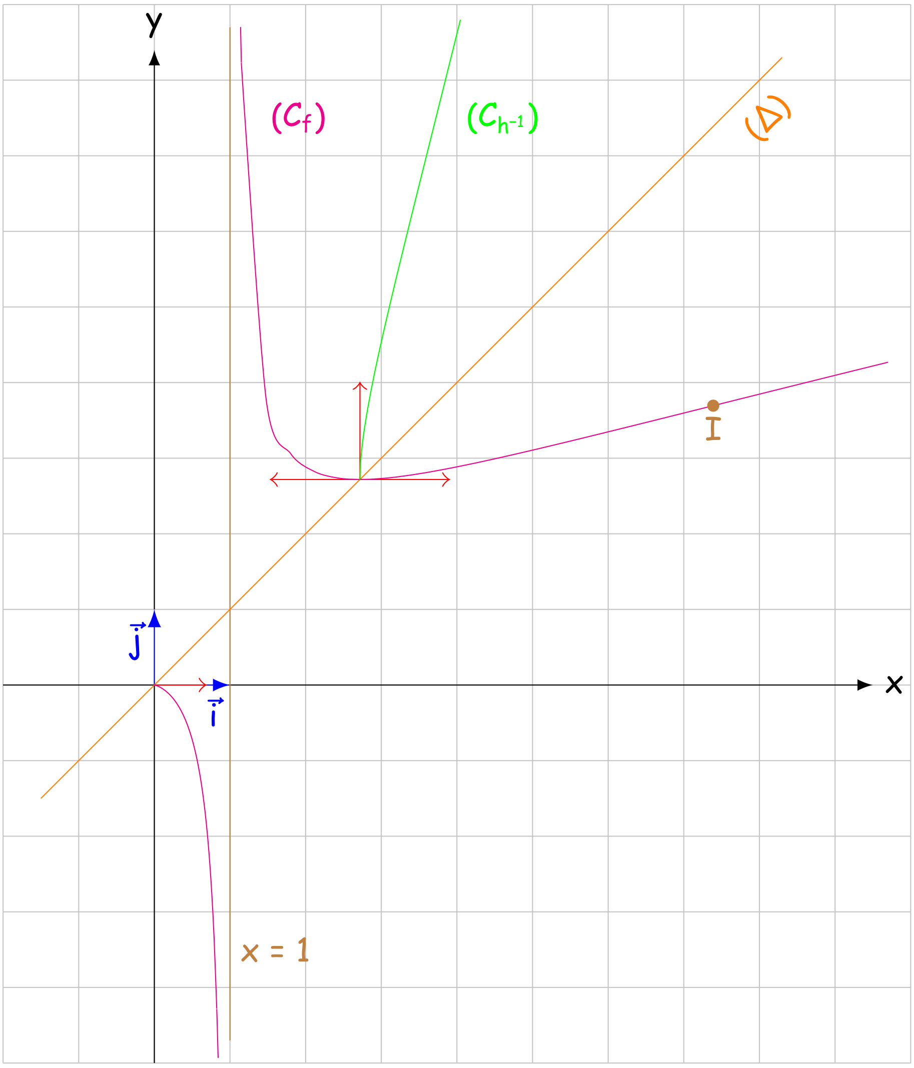
Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$ tel que :

$$\begin{aligned} J &= h(I) \\ &= h\left([e; +\infty[\right) \\ &= \left[h(e); \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[\\ &= [e; +\infty[\end{aligned}$$

b On pose : $y = h^{-1}(x) \Leftrightarrow x = h(y)$, $(x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to +\infty)$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{h(y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{\frac{y}{\ln(y)}} = \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$

$\boxed{10}$ Les courbes (C_f) et $(C_{h^{-1}})$:



II.

$\boxed{1}$

- Pour n = 0

  On a : $u_0 = 3$ et $3 \geq e$, donc la proposition est vraie pour n = 0

- Soit $n \in \mathbb{N}$

  On suppose que $u_n \geq e$ et on montre que $u_{n+1} \geq e$

  On a : f est croissante sur $[e; +\infty[$

  et comme $u_n \geq e$ alors $f(u_n) \geq f(e)$, par suite $u_{n+1} \geq e$

- Donc d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq e$

$\boxed{2}$ On a : $(\forall x \in [e; +\infty[); f(x) - x \leq 0$ (d'après la question 8 b)

et comme $u_n \in [e; +\infty[$ et , alors $f(u_n) - u_n \leq 0$, par suite $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

3 La suite (u_n) est décroissante et minorée par e, donc elle est convergente.

De plus : f est continue sur $[e; +\infty[$ et $f([e; +\infty[) = [e; +\infty[\subset [e; +\infty[$

Donc la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[e; +\infty[$.

On a : l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est : $S = \{0; 1\}$ (d'après la question **8** **a**)

Or, $0 \notin [e; +\infty[$, par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

Exercice 3

Session rattrapage 2022

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^4 (\ln x - 1)^2 \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2 **a** Montrer que f est continue à droite en 0.

b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

3 **a** Montrer que $f'(x) = 2x^3 (\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

b Dresser le tableau de variations de f.

4 **a** Sachant que $f''(x) = 2x^2 (6 \ln x - 5) \ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.

b Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

5 **a** Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \simeq 1.6$ et $e^2 \simeq 7.2$).

b En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 (\ln x - 1) = -1$.

6 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.

a Montrer que la fonction g est paire.

b Construite (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Correction

1 On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4(\ln x - 1)^2 = +\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4(\ln x - 1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\ln x - 1)^2 = +\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2 **a** On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x^4(\ln x - 1)^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} \left(x^2\right)^2(\ln x - 1)^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} \left[x^2(\ln x - 1)\right]^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} \left[x^2\ln x - x^2\right]^2 \\
&= 0 \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$ Donc f est continue à droite en 0

b On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{x^4(\ln x - 1)^2}{x} \\
&= \lim_{x\to0^+} x^3(\ln x - 1)^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} x(x)^2(\ln x - 1)^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} x\left[x(\ln x - 1)\right]^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} x\left[x\ln x - x\right]^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ Donc f est dérivable à droite en 0, c'est-à-dire (C) admet une demi-tangente horizontale à droite au point $(0;0)$

3 **a** La fonction $x \mapsto \ln(x) - 1$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction $x \mapsto x^4$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que produit de fonctions dérivables.
Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x^4 (\ln x - 1)^2\right]' \\ &= (x^4)' (\ln x - 1)^2 + x^4 \left[(\ln x - 1)^2\right]' \\ &= 4x^3 (\ln x - 1)^2 + x^4 \left[2 (\ln x - 1)' \times (\ln x - 1)\right] \\ &= 4x^3 (\ln x - 1)^2 + x^4 \left[2 \times \frac{1}{x} (\ln x - 1)\right] \\ &= 4x^3 (\ln x - 1)^2 + 2x^3 (\ln x - 1) \\ &= 2x^3 (\ln x - 1) \left[2(\ln x - 1) + 1\right] \\ &= 2x^3 (\ln x - 1) (2 \ln x - 1) \end{aligned}$$

b On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$, $2x^3 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$
Soit $x \in (]0;+\infty[)$. On a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(2\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = \sqrt{e}$$

- On a : $\left(\forall x \in \left]0; \sqrt{e}\right[\right)$, $\ln(x) - 1 < 0$ et $2\ln(x) - 1 < 0$
  Donc : $\left(\forall x \in \left]0, \sqrt{e}\right[\right)$, $f'(x) > 0$, par suite f est strictement croissante sur $\left[0; \sqrt{e}\right[$
- Et on a : $\left(\forall x \in \left[\sqrt{e}, e\right[\right)$, $\ln(x) - 1 < q0$ et $2\ln(x) - 1 \geq 0$
  Donc : $\left(\forall x \in \left[\sqrt{e}, e\right[\right)$, $f'(x) \leq 0$ et $f'\left(\sqrt{e}\right) = 0$, par suite f est strictement décroissante sur $\left[\sqrt{e}, e\right[$
- D'autre part : $(\forall x \in [e;+\infty[)$, $\ln(x) - 1 \geq 0$ et $2\ln(x) - 1 > 0$
  Donc : $(\forall x \in [e;+\infty[)$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(e) = 0$, par suite f est strictement croissante sur $[e;+\infty[$

Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a** On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$, $2x^2 > 0$, alors le signe de $f''(x)$ est celui de $\ln x (6\ln x - 5)$
Soit $x \in (]0;+\infty[)$. On a :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x (6\ln x - 5) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \sqrt[6]{e^5}$$

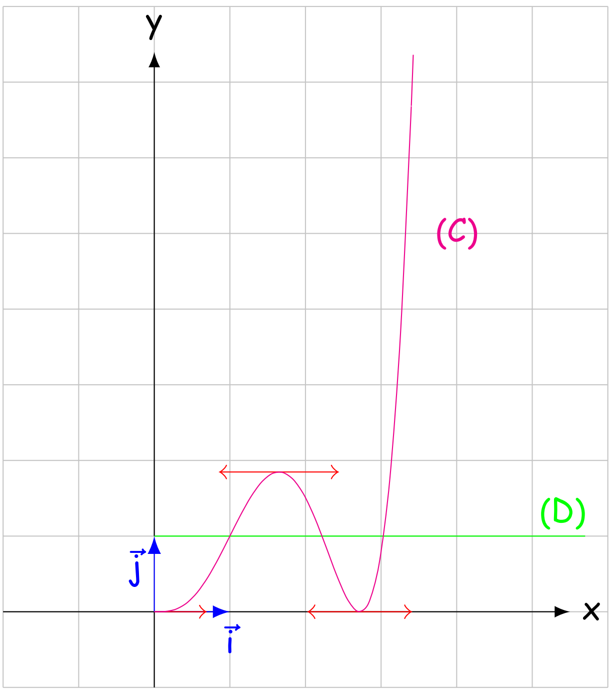
- On a : $(\forall x \in]0;1[)$, $\ln(x) < 0$ et $6\ln(x) - 5 < 0$
  Donc : $(\forall x \in]0,1[)$, $f''(x) > 0$
- Et on a : $\left(\forall x \in \left[1, \sqrt[6]{e^5}\right[\right)$, $\ln(x) \geq 0$ et $6\ln(x) - 5 < 0$
  Donc : $\left(\forall x \in \left[1, \sqrt[6]{e^5}\right[\right)$, $f''(x) \leq 0$
- D'autre part : $\left(\forall x \in \left[\sqrt[6]{e^5}; +\infty\right[\right)$, $\ln(x) > 0$ et $6\ln(x) - 5 \geq 0$
  Donc : $\left(\forall x \in \left[\sqrt[6]{e^5}; +\infty\right[\right)$, $f''(x) \geq 0$

b Tableau de concavité :

x	0		1		$\sqrt[6]{e^5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	P.I	$\cap$	P.I	$\cup$	

Ainsi (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectifs : 1 et $\sqrt[6]{e^5}$

5 **a** La courbe (C) :



b Pour que l'équation proposée soit bien définie, il faut que $x > 0$ et $\ln x - 1 < 0$, alors l'ensemble de définition de l'équation est :

$$\begin{aligned} D_E &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \text{ et } \ln x - 1 < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \text{ et } x < e\} \\ &=]0; e[\end{aligned}$$

Soit $x \in]0; e[$. On a :

$$x^2(\ln x - 1) = -1 \Leftrightarrow x^4(\ln x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

Graphiquement, pour résoudre l'équation $f(x) = 1$, on cherche l'intersection de (C) avec la droite (D) d'équation $y = 1$ (Voir la figure).

On déduit donc que (C) coupe (D) en deux points distincts dans $]0; e[$. D'où l'équation proposée admet deux solutions.

6 **a**

- On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $-x \in \mathbb{R}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

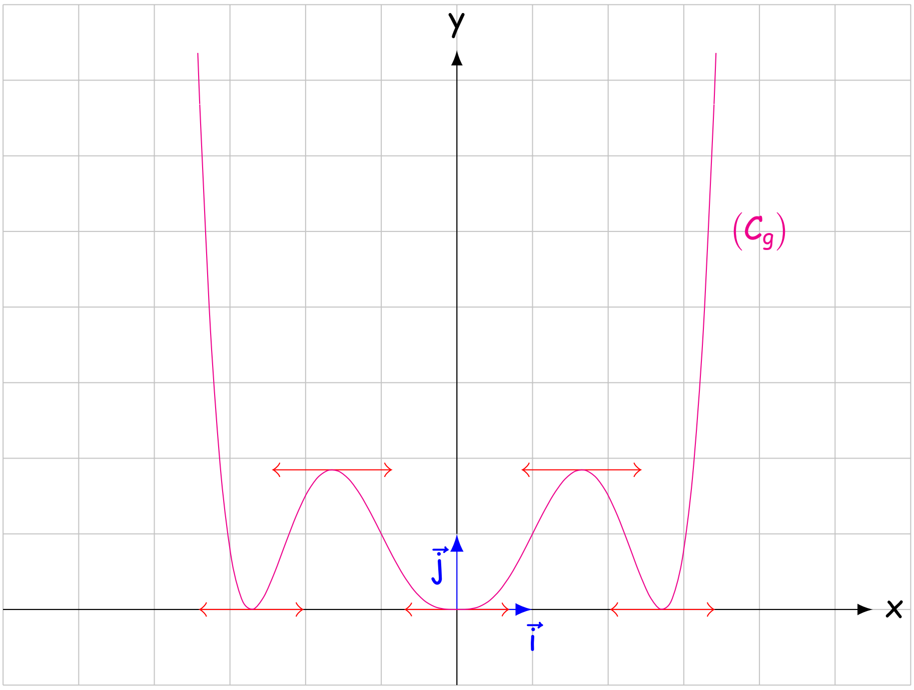
  $g(-x) = f\left(|-x|\right) = f\left(|x|\right) = g(x)$

  d'où g est une fonction paire.

b Puisque g est une fonction paire, alors sa courbe (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On : $(\forall x \in [0; +\infty[)$, $g(x) = f\left(|x|\right) = f(x)$

Donc la courbe de la fonction g est confondue avec celle de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et pour tracer (C_g) sur $]-\infty; 0]$, il suffit de construire le symétrique de (C) par rapport à l'axe des ordonnées.



Exercice 4

Session normale 2021

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - 2x \ ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Montrer que f est continue à droite en 0.

2 **a** Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

3 **a** Calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

b Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

c Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

4 **a** Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$

b Construire (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prend $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.5$).

5 **a** Déterminer la valeur minimale de f sur $]0; +\infty[$.

b En déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$.

6 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

7 **a** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

8 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x \quad ; \ x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x \quad ; \ x > 0 \end{cases}$

a Montrer que la fonction h est continue en 0.

b f est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse.

Correction

1 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x\ln x - 2x = 0$

Car : $\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} 2x = 0$

2 **a** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x(\ln x - 1) = +\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

b $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x(\ln x - 1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2(\ln x - 1) = +\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3 **a** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x(\ln x - 1)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} 2(\ln x - 1) = -\infty$

car : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0, c'est-à-dire (C) admet une demi-tangente verticale à droite au point $(0; 0)$ dirigée vers le bas

b La fonction $x \mapsto \ln(x) - 1$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto 20$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que produit et somme de fonctions dérivables.

Soit $x \in\ ]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x\ln x - 2x)' \\ &= (2x)' \times \ln x + 2x \times \ln' x - 2 \\ &= 2\ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 2 \\ &= 2\ln x + 2 - 2 \\ &= 2\ln x \end{aligned}$$

c On sait que :

- $(\forall x \in]0; 1])$; $\ln x \leq 0$, par suite $f'(x) \leq 0$
- $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $\ln x \geq 0$,par suite $f'(x) \geq 0$

Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a** Soit $x \in]0;+\infty[$. On :

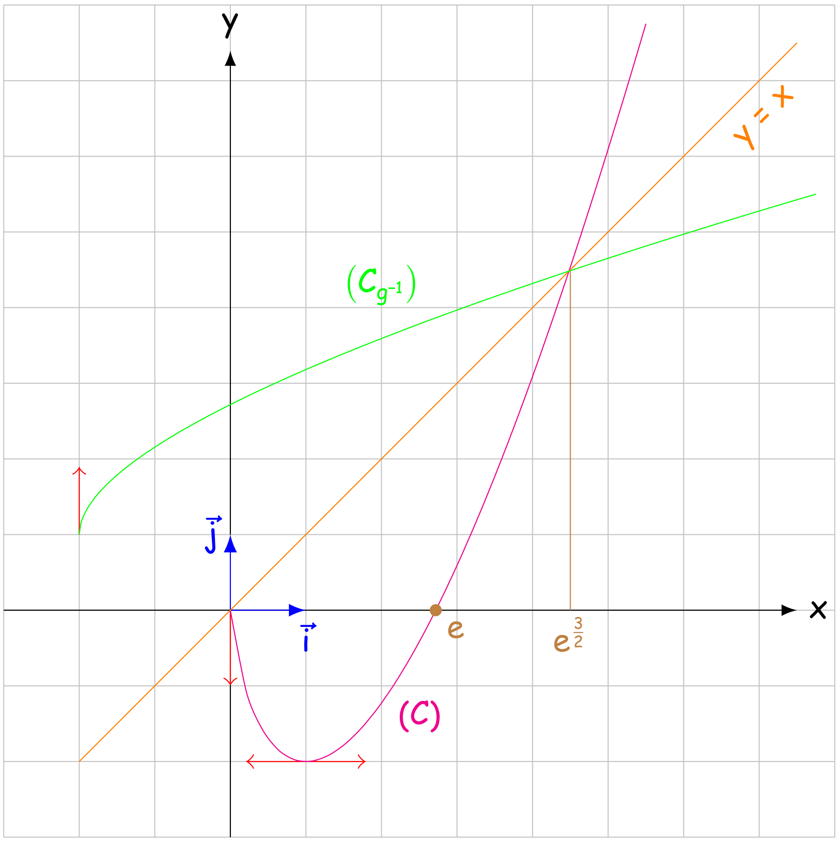
$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow 2x\ln x - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(\ln x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{e\}$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow 2x\ln x - 2x = x \\ &\Leftrightarrow 2x\ln x - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(2\ln x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}$

b La courbe (C) :



5 **a** D'après le tableau de variations de f, on déduit que -2 est une valeur minimale absolue de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b Puisque -2 est une valeur minimale absolue de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors

$(\forall x \in]0;+\infty[)$, $f(x) \geq -2 \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x \geq -2 \Leftrightarrow 2x\ln x \geq -2+2x \Leftrightarrow \ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$

6 a La fonction g est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$ (car elle est dérivable sur cet intervalle) et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g(I)$ tel que :

$$\begin{aligned} J &= g(I) \\ &= g\left([1;+\infty[\right) \\ &= \left[g(1); \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[\\ &= [-2;+\infty[\end{aligned}$$

b Voir la question 4 b

7 a On a : $h(0) = 0^3 + 3\times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 + 3x = 0$,

de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln x - 2x = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, par suite h est continue en 0.

b On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x} = -\infty$ (d'après la question 3 a)

Donc h n'est pas dérivable à droite en 0, par suite elle n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5

Session normale 2020

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

1 a Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

b Montrer que g est croissante sur $[1;+\infty[$.

c Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq \ln x 2\sqrt{x}$ (remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$).

d Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x^2}$.

2 Montrer que la fonction $G : x \mapsto x\left(-1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0;+\infty[$

Correction

1 a Les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$

Donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que somme de fonctions dérivables.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(2\sqrt{x}-2-\ln x\right)' \\ &= 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x} \end{aligned}$$

b On a : $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $x > 0$ et $\sqrt{x}-1 \geq 0$,

Donc $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $f'(x) \geq 0$, par suite g est croissante sur $[1;+\infty[$

c On a $g(1)$ est une valeur minimale absolue de g sur l'intervalle $[1;+\infty[$, alors $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-2-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq 2-2\sqrt{x} \Leftrightarrow \ln x \leq 2\sqrt{x}-2 \leq 2\sqrt{x}$

De plus : $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $\ln x \geq 0$

D'où : $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $\ln 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

d On a : $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $\ln 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$, alors $0 \leq (\ln x)^3 \leq \left(2\sqrt{x}\right)^3$,

donc $0 \leq (\ln x)^3 \leq 8x\sqrt{x}$, Par suite $0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8x\sqrt{x}}{x^2}$

D'où :$(\forall x \in [1;+\infty[)$, $0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{\sqrt{x}}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x^2}=0$

2 La fonction G est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que produit et somme de fonctions dérivables.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left[x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)\right]' \\ &= x'\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)' \\ &= -1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+x\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right) \\ &= -1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{4}{3}\times\frac{x}{2\sqrt{x}}-1 \\ &= -2+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2}{3}\sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x}-2-\ln x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.