Nombres complexes

Exercices corrigés

Exercice 1

Bac. Sciences Expérimentales Maroc, Juin 2022

Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le pont B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

1. Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$.
2. On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

   Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$
3. a. Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique.

   b. En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$
4. Soit (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

   a. Vérifier que $|z+2| = 2$

   b. Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

   c. En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Correction 1

1. On a D est l'image de B par la translation t, donc :

$$\begin{aligned} t(B) = D &\Leftrightarrow d = b + z_{\overrightarrow{OA}} \\ &\Leftrightarrow d = b + (a - 0) \\ &\Leftrightarrow d = -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow d = -2 \end{aligned}$$

2. On a D est l'image de B par la rotation R, donc :

$$R(B) = C \Leftrightarrow c = d + e^{\frac{2\pi}{3}i}(b-d)$$

$$\Leftrightarrow c = -2 + \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left(-1 + i\sqrt{3} + 2\right)$$

$$\Leftrightarrow c = -2 + \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow c = -2 + \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow c = -2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow c = -2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c = -4$$

3 **a** On a :

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a-c} &= \frac{-1 + i\sqrt{3} + 4}{-1 - i\sqrt{3} + 4} \\ &= \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(3 + i\sqrt{3}\right)\left(3 + i\sqrt{3}\right)}{\left(3 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + i\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{9 + i6\sqrt{3} - 3}{9 + 3} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

b On a :

$$\frac{c-d}{b-d} = \frac{-4+2}{-1 + i\sqrt{3} + 2} = \frac{-2}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-2\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)} = \frac{-2 + i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'autre part,

$$\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4 **a** On a : $M \in (\Gamma)$, alors $DM = 2$ donc $|z - d| = 2$ par suite, $|z + 2| = 2$.

b On a : $|z + 2| = 2$, alors $|z + 2|^2 = 4$ donc $(z + 2)(\overline{z} + 2) = 4$

c'est-à-dire $z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) = 0$

Par suite, $z + \bar{z} = -\frac{1}{2}z\bar{z} = -\frac{1}{2} \times |z|^2 = -8$

c) On pose $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$

On a : $z + \bar{z} = 2x = -8$, alors $x = -4$

D'autre par $|z| = 4 \Rightarrow z\bar{z} = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

Donc $z = -4 = c$, par suite les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'est C.

Exercice 2

Bac. Sciences Expérimentales Maroc, Juillet 2022

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$

1. Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$
2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
   Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h
3. On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R
4. Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$
   a) Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$
   b) En déduire que $\overline{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)} \equiv \pi[2\pi]$
   c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et en déduire la nature du triangle AEF
   d) Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Correction 2

1. On a : $Z_D = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{1 + 5i + 5 - 3i}{2} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$
2. On a E est l'image de B par l'homothétie h, donc :

$$h(B) = E \Leftrightarrow Z_E = Z_A + k(Z_B - Z_A)$$

$$\Leftrightarrow Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(1 - 5i - 1 - 5i)$$
$$\Leftrightarrow Z_E = 1 + 5i - 5i$$
$$\Leftrightarrow Z_E = 1$$

3 Soit B' l'image de B par la rotation R et $Z_{B'}$ l'affixe du point B.

$$R(B) = B' \Leftrightarrow Z_{B'} = Z_C + e^{-\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_C)$$
$$\Leftrightarrow Z_{B'} = 5 - 3i + \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right](1 - 5i - 5 + 3i)$$
$$\Leftrightarrow Z_{B'} = 5 - 3i - i(-4 - 2i)$$
$$\Leftrightarrow Z_{B'} = 5 - 3i + 4i - 2$$
$$\Leftrightarrow Z_{B'} = 3 + i$$
$$\Leftrightarrow Z_{B'} = Z_D$$

Donc D est l'image de B par la rotation R

4 **a** On a :

$$\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \frac{3 + i - 1 - 5i}{-1 + i - 1 - 5i} \times \frac{-1 + i - 1}{3 + i - 1}$$
$$= \frac{2 - 4i}{-2 - 4i} \times \frac{-2 + i}{2 + i}$$
$$= \frac{1 - 2i}{-1 - 2i} \times \frac{-2 + i}{2 + i}$$
$$= \frac{(1 - 2i) \times i}{-1 - 2i} \times \frac{-2 + i}{(2 + i) \times i}$$
$$= \frac{2 + i}{-1 - 2i} \times \frac{-2 + i}{-1 + 2i}$$
$$= -\frac{(2 + i)(-2 + i)}{(1 + 2i)(-1 + 2i)}$$
$$= -\frac{-5}{-5}$$
$$= -1$$

b On a : $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$, alors : $\arg\left[\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}\right] \equiv \arg(-1)\,[2\pi]$

donc : $\arg\left[\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A}\right] + \arg\left[\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}\right] \equiv \pi\,[2\pi]$

D'où : $\overline{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)} \equiv \pi[2\pi]$

c On a : $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \frac{1 + 1 - i}{1 + 5i + 1 - i} = \frac{2 - i}{2 + 4i} = \frac{(2 - i)(2 - 4i)}{2^2 + 4^2} = \frac{4 - 8i - 2i - 4}{20} = -\frac{1}{2}i$

Donc : $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Et on a : $\overline{\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FE}\right)} \equiv \arg\left(\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}\right)\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, alors le triangle AEF est rectangle en F

d On a : $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1 \in \mathbb{R}$, Donc les points A, D , E et F appartiennent au même cercle (C) (cocycliques).

Et comme le triangle AEF est rectangle en F, alors [AE] est le diamètre du cercle (C) avec $AE = |Z_E - Z_A| = |5i| = 5$

Exercice 3

Bac. Sciences Expérimentales Maroc, Juin 2021

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
2. Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   - a Ecrire a sous forme algébrique.
   - b Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a , b et $\bar{a}$.

3. Montrer que le point B est l'image de du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.
4. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   - a Ecrire z′ en fonction de z et a.
   - b Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$
   - c Soit I le point d'affixe 1, montrer que ADIO est un losange.
5.
   - a Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$
   - b Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.
   - c Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}\right)$

Correction 3

1. On a : $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 < 0$ Alors l'équation admet deux solutions complexes conjugués : $z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$

2 **a** On a : $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b On a :

$$\begin{aligned}
\bar{a}b &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4}i^2 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

3 On a : $\bar{a}b = \sqrt{3} \Leftrightarrow a\bar{a}b = \sqrt{3}a \Leftrightarrow b = 0 + \sqrt{3}(a - 0) \Leftrightarrow h(B) = A$

Donc le point B est l'image de du point A par l'homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport $k = \sqrt{3}$.

4 **a** On a M′ est l'image de M par la rotation R, donc :

$$\begin{aligned}
R(M) = M' &\Leftrightarrow z' = a + e^{\frac{\pi}{2}i}(z - a) \\
&\Leftrightarrow z' = a + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right](z - a) \\
&\Leftrightarrow z' = a + i(z - a) \\
&\Leftrightarrow z' = iz - ia + a
\end{aligned}$$

b On a D est l'image de C par la rotation R, donc :

$$\begin{aligned}
R(C) = D &\Leftrightarrow d = ic - ia + a \\
&\Leftrightarrow d = i\bar{a} - ia + a \\
&\Leftrightarrow d = i(\bar{a} - a) + a \\
&\Leftrightarrow d = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + a \\
&\Leftrightarrow d = i\left(-2 \times \frac{1}{2}i\right) + a \\
&\Leftrightarrow d = 1 + a
\end{aligned}$$

c On a : $d = a + 1 \Leftrightarrow d - a = 1 - 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OI}$

alors ADIO est un parallélogramme

D'autre part, On a : $|d-a| = 1$ et $|a-0| = |a| = 1$, alors $|d-a| = |a-0|$ donc $AD = AO$

Par suite, ADIO est un losange

5 **a** On a :

$$\begin{aligned} d-b &= a+1-\sqrt{3}a \qquad \text{d'après la question } \mathbf{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+1-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)+\frac{1}{2}(1-i) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \arg(d-b) &\equiv \arg\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right] \ [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\arg(1-i) \ [2\pi] \\ &\equiv 0+\left(-\frac{\pi}{4}\right) \ [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{aligned}$$

Car : $\frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$ et

$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

b On a : $1-b = 1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et on a : $|b| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

alors :

$$\begin{aligned} 1-b &= -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

c On a :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right) &= \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)\ [2\pi] \\ &= \arg(d-b) - \arg(1-b)\ [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\ [2\pi] \\ &= -\frac{19\pi}{12}\end{aligned}$$

Exercice 4

Bac. Sciences Expérimentales Maroc, Juillet 2021

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 3 + 2i$, $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$
   - a Écrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.
   - b En déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M′ d'affixe z′ l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.
   - a Écrire z′ en fonction de z.
   - b Vérifier que C est l'image de A par R.

4.
   - a Montrer que les points A, C et D sont alignés.
   - b Déterminer le rapport d'homothétie h de centre C et qui transforme A en D.
   - c Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère BCDE soit un parallélogramme.

5.
   - a Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.
   - b En déduire que le quadrilatère ABED est un trapèze isocèle.

Correction 4

1. On a : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$ Alors l'équation admet deux solutions complexes conjugués : $z_1 = \dfrac{6+4i}{2} = 3+2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3-2i$

   Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{3+2i, 3-2i\}$

2. a) On a : $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{-1-2i-3+2i}{3+2i-3+2i} = \dfrac{-4}{4i} = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

   b) On a : $\dfrac{c-b}{a-b} = i$ alors $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = |i| = 1$ donc $|c-b| = |a-b|$ par suite $BC = BA$

   D'autre part, on a : $\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \equiv \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$

   Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B

3. a) On a M′ est l'image de M par la rotation R, donc :

$$\begin{aligned}
R(M) = M' &\Leftrightarrow z' = b + e^{\frac{\pi}{2}i}(z-b) \\
&\Leftrightarrow z' = 3-2i + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right](z-3+2i) \\
&\Leftrightarrow z' = 3-2i + i(z-3+2i) \\
&\Leftrightarrow z' = 3-2i + iz - 3i - 2 \\
&\Leftrightarrow z' = iz + 1 - 5i
\end{aligned}$$

   b) Soit $A'(a')$ l'image de A par la rotation R, on a :

$$\begin{aligned}
R(A) = A' &\Leftrightarrow a' = ia + 1 - 5i \\
&\Leftrightarrow a' = i(3+2i) + 1 - 5i \\
&\Leftrightarrow a' = 3i - 2 + 1 - 5i \\
&\Leftrightarrow a' = -1 - 2i \\
&\Leftrightarrow a' = c \\
&\Leftrightarrow R(A) = C
\end{aligned}$$

4. a) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d-c}{a-c} &= \frac{-3-4i+1+2i}{3+2i+1+2i} \\
&= \frac{-2i-2i}{4+4i} \\
&= \frac{-2(1+i)}{4(1+i)} \\
&= \frac{-2}{4} \\
&= -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc les points A, C et D sont alignés.

b On a l'image de A par h est D. Soit k le rapport de l'homothétie h, on a :

$$\begin{aligned} h(A) = D &\Leftrightarrow d = c + k(a - c) \\ &\Leftrightarrow d - c = k(a - c) \\ &\Leftrightarrow k = \frac{d-c}{a-c} \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

c BCDE est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} &\Leftrightarrow c - b = d - m \\ &\Leftrightarrow m = d + b - c \\ &\Leftrightarrow m = -3 - 4i + 3 - 2i + 1 + 2i \\ &\Leftrightarrow m = 1 - 4i \end{aligned}$$

5 a On a :

$$\begin{aligned} \frac{d-a}{m-b} &= \frac{-3-4i-3-2i}{1-4i-3+2i} \\ &= \frac{-6-6i}{-2-2i} \\ &= \frac{-6(1+i)}{-2(1+i)} \\ &= 3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b On a : $\frac{d-a}{m-b} = 3$ alors $d - a = 3(m - b)$ donc $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BE}$

D'autre part, on a :

$AE = |m - a| = |1 - 4i - 3 - 2i| = |-2 - 6i| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$

et $BD = |d - b| = |-3 - 4i - 3 + 2i| = |-6 - 2i| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$

donc $AE = BD$

Par suite ABED est un trapèze isocèle.

Exercice 5

Bac. Sciences Expérimentales Maroc, Juin 2020

1 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) \quad : \quad z^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)z + 16 = 0$$

a Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$.

b En déduire les solutions de l'équation (E).

2 Soient les nombres complexes $a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b = 1+i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a Vérifie que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

b Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

c En déduire que $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d tel que $d = a^4$.

Soient z l'affixe d'un point M et z′ l'affixe de M′ image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

a Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$.

b Déterminer l'image du point C par la rotation R.

c Déterminer la nature du triangle OBC.

d Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Correction 5

1 a On a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right]^2 - 4\times 16 \\
&= 4\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 - 4\times 16 \\
&= 4\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 - 16\right] \\
&= 4\left(2+6+2\sqrt{2}\sqrt{6}-16\right) \\
&= 4\left(-2-6+2\sqrt{2}\sqrt{6}\right) \\
&= -4\left(6+2-2\sqrt{2}\sqrt{6}\right) \\
&= -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2
\end{aligned}$$

b Puisque $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\sqrt{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+2i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$$
$$= \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

et $z_2 = \overline{z_1} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) ; \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right\}$$

2 a On a :

$$\begin{aligned} b\bar{c} &= \left(1+i\sqrt{3}\right)\overline{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)} \\ &= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \\ &= a \end{aligned}$$

Et on a : $a = b\bar{a}$ alors $ac = bc\bar{c}$ donc :

$$\begin{aligned} ac &= bc\bar{c} \\ &= b\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\overline{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)} \\ &= b\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\ &= b\left((\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}^2)\right) \\ &= 4b \end{aligned}$$

b On a : $|b| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$, alors : $b = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Et on a : $|c| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 2$, alors :

$$c = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

c On sait que $a = b\bar{c}$ alors $|a| = |b\bar{c}| = |b| \times |\bar{c}| = |b| \times |c| = 4$

et on a :

$$\begin{aligned} \arg(a) &\equiv \arg(b\bar{c}) \ [2\pi] \\ &\equiv \arg(a)+\arg(\bar{c}) \, [2\pi] \end{aligned}$$

$$\equiv \arg(a) - \arg(c)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$$

D'où : $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3 **a** On a M′ est l'image de M par la rotation R, donc :

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = 0 + e^{\frac{\pi}{12}i}(z - 0)$$
$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) z$$
$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{4} \times 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) z$$
$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}az$$

b Soit $C'(c')$ l'image de C par la rotation R, on a :

$$R(A) = C' \Leftrightarrow c' = \frac{1}{4}ac$$
$$\Leftrightarrow c' = \frac{1}{4} \times 4b$$
$$\Leftrightarrow c' = b$$
$$\Leftrightarrow R(C) = B$$

Donc le point B est l'image de A par R

c On a :

$$R(C) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OC = OB \\ \overline{\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)} \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle OBC est isocèle en O

d On a :

$$a^4 = \left[4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^4$$
$$= 4^4\left[\left(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}\right)\right]$$
$$= 256\left[\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 128\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 128b$$

e On a : $a^4 = 128b$ alors $\dfrac{a^4}{b} = 128$ donc $\dfrac{d-0}{b-0} = 128 \in \mathbb{R}$
D'où les point O, B et D sont alignés.

Exercice 6

Bac. Sciences Expérimentales Maroc, Juillet 2019

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

2. On pose $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

   a Écrire le nombre a sous forme trigonométrique.

   b Vérifier que : $b^2 = i$.

3. On pose $h = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. Montrer que : $h^4 + 1 = a$.

4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a Soit c l'affixe du point C l'image du point B par la rotation R. Montrer que : $c = ib$.

   b En déduire la nature du triangle OBC.

Correction 6

1. On a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ Alors l'équation admet deux solutions complexes conjugués : $z_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

   Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

2. **a** On a : $|a| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$, alors :

   $a = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

   b On a :

$$
\begin{aligned}
b^2 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 \\
&= \frac{2}{4}(1+i)^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}(1+2i-1)$$
$$= i$$

3 On a :

$$h^4+1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^4+1$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)+1$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+1$$
$$= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$
$$= \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= a$$

4 a On a C est l'image de B par la rotation R, donc :

$$R(B) = C \Leftrightarrow c = 0 + e^{\frac{\pi}{2}i}(b-0)$$
$$\Leftrightarrow c = \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)b$$
$$\Leftrightarrow c = ib$$

b On a : $c = ib$ alors $|c| = |ib| = |b|$ donc $OB = OC$
d'autre par, on a : $\frac{c}{b} = i$ alors $\frac{c-0}{b-0} = i$ donc $\arg\left(\frac{c-0}{b-0}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ c'est-à-dire
$\overline{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$
D'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

FIN