Probabilités

• Dénombrement :

Définitions	✓ Le cardinal de E est le nombre des éléments de E et on le note : $Card(E)$ ✓ Le complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ $\quad \bar{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$
Propriétés	✓ $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ ✓ Si $A \cap B = \emptyset$ alors : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ ✓ $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$ $\quad A \cup \bar{A} = E$ $\quad A \cap \bar{A} = \emptyset$

• **Le principe fondamental du dénombrement**

Dans une situation de dénombrement contient p choix

Si le 1^{er} choix se réalise par n_1 façon distincts

et le 2^{ieme} choix se réalise par n_2 façon distincts ....

et le p^{ieme} choix se réalise par n_p façon distincts

Alors le nombre des possibilités est $\quad n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$

arrangements	✓ Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n éléments est $\quad$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\leq n$) $A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ ✓ Le nombre des arrangements avec répétition de p élément pris parmi n élément est : n^p $\quad$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$)
permutations	✓ Tout arrangement de n éléments pris parmi n éléments appelé une permutation, le nombre des permutations est $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$
combinaisons	✓ Soit E un ensemble de cardinal n $\quad$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $p \leq n$) ✓ Toute partie de E contenant p éléments appelée combinaison de p éléments pris parmi n éléments ✓ Le nombre des combinaisons est : $\quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

• **Les types de tirage :On tire p éléments parmi n éléments** (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$)

Le type de tire	Le nombre des possibilités	L'ordre
simultanément $(p \leq n)$	C_n^p	N'est pas important
Successivement et avec remise	n^p	important
Successivement et sans remise $(p \leq n)$	A_n^p	important

• **le tirage successivement (l'ordre à une importance)**

✓ On tire 3 boules distincts deux à deux

✓ Le nombre de possibilités pour arranger les couleurs est $3! = A_3^3 = 6$

◍	●	○	Le cas numéro 1
◍	○	●	Le cas numéro 2
●	◍	○	Le cas numéro 3
●	○	◍	Le cas numéro 4
○	◍	●	Le cas numéro 5
○	●	◍	Le cas numéro 6

✓ On tire 2 boules de même couleurs et une autre de couleur différent

✓ Le nombre de possibilités pour arranger les couleurs est $C_3^1 = C_3^2 = 3$

◍	●	●	Le cas numéro 1
●	◍	●	Le cas numéro 2
●	●	◍	Le cas numéro 3

- **Probabilités**

Univers des éventualités Ω	L'ensemble de toutes les éventualités
L'événement A	A partie de Ω
L'événement contraire $\overline{A}$	Un événement vérifier : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Propriétés	• Ω Univers des éventualités d'une expérience aléatoire $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
La probabilité d'un événement	• Equiprobabilité : $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
La probabilité conditionnelle	• La probabilité de B sachant que A est réalisé $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ $(P(A) \neq 0)$
L'indépendance	• A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- **Les variables aléatoires**

loi de probabilité d'une variable aléatoire	• Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω • L'ensemble des valeurs pris par X est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ • La détermination de la loi de probabilité de X signifier le calcul des probabilités des événements $(X = x_i)$ avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ • On résume la loi de probabilité de$X$ par le tableau : (voir tableau ci-dessous) ✓ Remarque : $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots . p_n = 1$
L'espérance mathématique	$E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3 + \cdots + x_n.p_n$
La variance	$V(X) = x_1^2.p_1 + x_2^2.p_2 + x_3^2.p_3 + \cdots + x_n^2.p_n - \left(E(X)\right)^2$
L'écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
La loi binomiale	• A un événement dans une expérience aléatoire de probabilité p, En répète l'expérience n fois • La variable aléatoire X égale au nombre de fois ou l'événement A se réalise appelée loi binomiale de paramètres n et p • $\forall k \in \{1, 2, \dots n\}$ $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ • $E(X) = np$ و $V(X) = np(1-p)$

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n