Semestre II | Année scolaire : **2022-2023**

Simili

Niveau :2 ^{eme}BAC | Durée :2h

Exercice I :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 3 + 3i, \quad b = \bar{a}, \quad c = -3 - 3i$$

1. (a) Vérifier que : $c = -ib$
   (b) En déduire la nature du triangle OBC
2. On considère le point D d'affixe $d = -5 + 5i$
   (a) Montrer que les points O, B et D sont alignés
   (b) En déduire que la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$
3. On considère le nombre complexe h qui vérifié $bh = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
   (a) Déterminer la forme trigonométrique de b.
   (b) En déduire que $|h| = \sqrt{2}$ et $\arg h \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
4. (a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe bh
   (b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
   (c) Montrer que $(\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i)^{12}$ est un réel négatif
5. Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ dans le plan complexe tel que : $|(1-i)\bar{z}| = 6$ est le cercle circonscrit du triangle ABC

Exercice II :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 1$.
2. (a) vérifier que $u_n - u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n-1)}{u_n+1}$, puis déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente.
3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis exprimer v_n en fonction de v_n.
   (b) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).
4. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 1,01$.

Exercice III :

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$(\forall x \in]0,+\infty[), g(x) = -[2(x\sqrt{x}-1)+\ln x]$$

1. Montrer que g est décroissante $]0;+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$(\forall x \in]0,+\infty[), f(x) = 1 - x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 1 cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ) : $y = -x+1$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (Δ).
3. Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[), f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer (Δ) et $\mathscr{C}_f$.

Partie III

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 1 + \frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} \quad \text{et } u_0 = \frac{5}{4}$$

1. Montrer que $(\forall x \in]1,2[)$, $0 < \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$
2. Montrer, par récurrence, que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$
3. En remarquant que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = u_n + f(u_n)$, déterminer la monotonie de la suite $\left(u_n\right)$.
4. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente, puis déterminer sa limite.