Groupe Scolaire *Devoir libre* **Année scolaire : 2022/2023**

Exercice 1 : 8pts

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct on considère les points A ; B et C d affixes respectives $a = 4\sqrt{3} - 4i$; $b = 4\sqrt{3} + 4i$; $c = 8i$

1) Ecrire a et b sous forme trigonométrique.

2) Montrer que $a^{12} = b^{12}$

3) Montrer que $\frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ en déduire la nature du triangle OAB.

4) a-Déterminer l'affixe du point D tel que $OADB$ est un parallélogramme.

b-Déduire que $OADB$ est un losange.

5) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$ et le point $M'(z')$ image du point $M(z)$ par la rotation r.

a-Montrer que : $z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

b- Montrer que le point B est l'image du point C par la rotation r.

Exercice 2 : 12pts

I) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{2x} + 1$

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a-Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de g.

b-Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) \succ 0$

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x - e^{-x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a-Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b- Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement ces deux résultats

2) a- Monter que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = e^{-x}g(x)$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 \prec \alpha \prec 2$.

4) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) au point d'abscisse 0.

5) a- Monter que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x)=\dfrac{xe^{2x}+e^{2x}-1}{e^{x}}$

b-Monter que xe^{2x} et $e^{2x}-1$ ont le même signe sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et déduire que $f''(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$.

c- Monter que xe^{2x} et $e^{2x}-1$ ont le même signe sur l'intervalle$]-\infty;0]$ et déduire que $f''(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0]$.

d-Déterminer le point d'inflexion de la courbe (C_f) .

6) Construire la courbe (C_f) et la tangente (Δ) .

7) a-Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b--Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{\alpha e^{\alpha}+e^{-\alpha}}$.

c- Construire dans le même repère la courbe $(C_{f^{-1}})$.