Prof Abdelwahed

Les nombres complexes

Bac-inter

$$\boxed{i^2 = -1}$$

♦ Forme algébrique :

La forme algébrique de Z c'est : $Z = a + ib$

Avec :

a : partie réelle noté par : $\operatorname{Re}(Z) = a$

b : partie imaginaire noté par : $\operatorname{Im}(Z) = b$

♦ le conjugué d'un nombre complexe :

Soit $Z = a + ib$ *un nombre complexe*

Le conjugué de Z noté par $\overline{Z}$

et on a : $\boxed{\overline{Z} = a - ib}$

♦ Propriétés :

$$\boxed{(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2}$$

♦ Vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A}$$

♦ milieu de segment $[AB]$:

$$\boxed{Z_I = \frac{Z_B + Z_A}{2}}$$

♦ Module d'un nombre complexe:

Soit $Z = a + ib$ *un nombre complexe*

Le module de Z noté par $\overline{Z}$.

avec : $\boxed{|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

♦ La distance AB :

$$\boxed{AB = |Z_B - Z_A|}$$

♦ Les points alignés :

$$\boxed{\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in R}$$

♦ Equations du second degré :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta < 0$$

Alors l'équation admet dans C deux solutions

Complexe et conjugués Z_1 *et* Z_2 *avec* $Z_2 = \overline{Z_1}$

Tels que :

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$S\{\, Z_1 ; Z_2 \}$$

♦ La forme trigonométrique :

Pour déterminer la forme trigonométrique de on doit passer par deux étapes :

1 – calcule le module

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2 –

$$Z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = [r ; \theta]$$

r *: le module*

θ *: L'argument*

♦ Operations sur la forme trigonométrique :

Soit $Z_1 = [r_1 ; \theta_1]$ *et* $Z_2 = [r_2 ; \theta_2]$

$$Z_1 \times Z_2 = [\, r_1 \times r_2 ; \theta_1 + \theta_2 \,]$$

$$Z_1^n = [\, r_1^n ; n\theta_1 \,]$$

$$\overline{Z_1} = [\, r_1 ; -\theta_1 \,]$$

♦ Formule d'Euler :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

♦ Formule de Moivre :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

♦ La forme exponentielle:

Si Z s'écrit sous la forme : $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Alors la forme exponentielle de Z c'est :

$$\boxed{Z = re^{i\theta}}$$

♦ Les Operations sur la forme exponentielle:

Soit $Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ و $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$	$Z_1 \times Z_2 = r_1 \times r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ $Z_1^{\,n} = r_1^{\,n} e^{in\theta_1}$ $\overline{Z_1} = re^{-i\theta_1}$ $-Z = re^{i(\pi+\theta)}$

♦ Argument de Z :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)[2\pi]$$

♦ argument de Z :

$$\arg(Z_1 \times Z_2) \equiv \arg(Z_1) + \arg(Z_2)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) \equiv \arg(Z_1) - \arg(Z_2)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) \equiv -\arg(Z)[2\pi]$$
$$\arg(Z^n) \equiv n\arg(Z)[2\pi]$$
$$\arg(\overline{Z}) \equiv -\arg(Z)[2\pi]$$
$$-\arg(Z) \equiv (\pi + \arg(Z))[2\pi]$$

♦ l'ensemble des points :

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que :*

$$\boxed{\Omega M = R}$$

Cercle de centre Ω *et de rayon* R *.*

L'ensemble des points $M(z)$ *tels que :*

$$\boxed{AM = BM}$$

Médiatrice du segment $[AB]$ *.*

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$
$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$-\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$
$$-\sin\theta - i\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

♦ Translation:

$$\underset{\text{(L'image)}}{Z} = \underset{\text{(L'origine)}}{Z} + \underset{\text{(vecteur)}}{Z}$$

♦ Homothétie:

$$\underset{\text{(L'image)}}{Z} + \underset{\text{(le centre)}}{Z} = \underset{\text{(le rapport)}}{k}\left(\underset{\text{(L'origine)}}{Z} + \underset{\text{(le centre)}}{Z}\right)$$

♦ Rotation:

$$\underset{\text{(L'image)}}{Z} + \underset{\text{(le centre)}}{Z} = \underset{\text{(l'angle)}}{e^{i\theta}}\left(\underset{\text{(L'origine)}}{Z} + \underset{\text{(le centre)}}{Z}\right)$$

Avec : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

♦ La nature du triangle :

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A ssi :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

ABC est un triangle équilatéral en A ssi :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

♦ ABDC est un parallélogramme

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$$
$$\Leftrightarrow \quad Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$$

♦ Un carré

- *parallélogramme*
- *triangle rectangle et isocèle.*

♦ Losange

- *parallélogramme.*
- *Deux côtes consécutifs égaux.*

♦ *les points A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre* Ω *et de rayon* R*.*
ssi :

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = R$$
$$|Z_A - Z_\Omega| = |Z_B - Z_\Omega| = |Z_C - Z_\Omega| = R$$