Royaume du Maroc Ministère de l' Education Nationale et de la Formation Professionnelle	Examen national du baccalauréat Matière : **Mathématiques** Filières : Sciences expérimentales et techniques Branches : Toutes les branches	Session normale Juin 2010 Durée : 3h

Exercice 1 :

Géométrie dans l'espace

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(-1,0,3)$, $B(3,0,0)$ et $C(7,1,-3)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 — 1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 — 2) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,1,0)$ et que son rayon est 5

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.5 — $a-$ Montrer que $\begin{cases} x = 3+3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

1 — $b-$ Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$

Exercice 2 :

Nombres complexes

3 points

1 — 1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-6z+10=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=3-i$, $b=3+i$ et $c=7-3i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R du centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 — $a-$ Montrer que $z' = iz+2-4i$

0.25 — $b-$ Vérifier que l'affixe du point C', l'image du point C par la rotation R, est $c' = 5+3i$

1.25 — $c-$ Montrer que $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$

Exercice 3 :

Calcul des probabilités

3 points

Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (Les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément quatre boules de l'urne.

1 1) On considère les deux événements suivants : A :"Obtenir une seule boule rouge" et B :"Obtenir au moins une boule blanche".

Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{2}$ et que $p(B) = \dfrac{41}{42}$

2) On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules rouges tirées.

0.25 $a-$ Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3

1 $b-$ Montrer que $p(X=2) = \dfrac{3}{10}$ et que $p(X=0) = \dfrac{1}{6}$

0.75 $c-$ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 :

Suites numériques

3 points

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{2U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 1) Montrer par récurrence que $U_n - 1 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2) On considère la suite numérique (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 $a-$ Montrer que (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $V_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 $b-$ Montrer que $U_n = \dfrac{V_n - 1}{2V_n - 1}$ puis déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

0.5 3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$ sachant que (W_n) est la suite numérique définie par : $W_n = \ln(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Problème : **Etude de fonctions** 8 points

$I.$ On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0.5 1) Montrer que $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 2) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

0.5 3) $a-$ Montrer que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ puis vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 $b-$ Déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

$II.$ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ $\left(||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = 2cm\right)$

1 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (Rappelons que $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$)

0.75 2) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.75 3) $a-$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

0.5 $b-$ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (x+1)\right]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 $c-$ Déterminer le couple des coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

0.25 4) $a-$ Montrer que l'équation de la droite (T), la tangente à la courbe (C) au point O, est $y = x$

0.25 $b-$ Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (On ne demande pas de déterminer l'ordonnée du point d'inflexion)

0.75 5) Construire les deux droites, (Δ) et (T), et la courbe (C) dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1 6) $a-$ En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$

0.5 $b-$ Montrer que l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (T) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ égale $(6 - 2e)cm^2$