Royaume du Maroc Ministère de l' Education Nationale et de la Formation Professionnelle	Examen national commun du baccalauréat Matière : **Mathématiques** Filières : Sciences expérimentales et techniques Branches : Toutes les branches	Session normale Juin 2011 Durée : 3h

Exercice 1 :

Equations et inéquations logarithmiques

2.5 points

0.5 1) $a-$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+4x-5=0$

1 $b-$ Résoudre, dans l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

1 2) Résoudre, dans l'intervalle $]0,+\infty[$, l'inéquation : $\ln(x)+\ln(x+1)\geqslant\ln(x^2+1)$

Exercice 2 :

Suites numériques

3 points

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{5+8U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 1) Montrer par récurrence que $U_n>0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2) On pose : $V_n=\dfrac{1}{U_n}+2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1.5 $a-$ Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer V_n en fonction de n

1 $b-$ Montrer que $U_n=\dfrac{1}{3\times 5^n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (U_n)

Exercice 3 :

Nombres complexes

5 points

1 1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-18z+82=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=9+i$, $b=9-i$ et $c=11-i$

1 $a-$ Montrer que $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B

0.5 $b-$ Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-i)$

1 $c-$ Montrer que $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ puis en déduire que $AC\times BC=4\sqrt{2}$

1.5 $d-$ Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

Montrer que $z'=-iz+10+8i$ puis vérifier que l'affixe du point C', l'image du point C par la rotation R, est $9-3i$

Problème : Etude de fonctions 9.5 points

I. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

0.5 1) $a-$ Montrer que $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.75 $b-$ Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est croissante sur $]-\infty, 0]$ et vérifier que $g(0) = 0$

0.5 2) Déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

II. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (**unité** : 1 cm)

0.5 1) $a-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

0.75 $b-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique, au voisinage de $+\infty$, dont on précisera la direction

0.75 2) $a-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x)+x\big)$ (rappelons que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$)

0.25 $b-$ Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 3) $a-$ Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.25 $b-$ Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$

0.5 $c-$ Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f

0.5 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$ (admettons que $e^{\frac{3}{2}} > 3$)

0.5 5) $a-$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que la courbe (C) et la droite (D) se coupent au point $A(2, -2)$

0.25 $b-$ Etudier le signe de $f(x) + x$ sur $\mathbb{R}$

0.25 $c-$ En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty, 2[$ et qu'elle est au-dessous de (D) sur $]2, +\infty[$

0.5 6) $a-$ Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0, 2)$

1 $b-$ Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1 7) $a-$ En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

0.25 $b-$ En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$