Royaume du Maroc

Ministère de l' Education Nationale et de la Formation Professionnelle

Examen national commun du baccalauréat

Matière : **Mathématiques**

Filière : Sciences expérimentales et techniques

Branches : Toutes les branches

Session normale

Juin 2012

Durée : 3h

Problème : | Etude de fonctions | 8 points

$I.$ Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+2x^2\ln(x)$

0.75 1) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln(x)$ ont le même signe sur $]0,1[$ puis en déduire que $g(x)\leqslant 0$ pour tout x de $]0,1]$

0.75 2) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln(x)$ ont le même signe sur $]1,+\infty[$ puis en déduire que $g(x)\geqslant 0$ pour tout x de $[1,+\infty[$

$II.$ On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\left(x^2-1\right)\ln(x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (**unité** : 1 cm)

0.5 1) $a-$ Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

1 $b-$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

(On pourra écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln(x)$)

et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction

1.25 2) $a-$ Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ et interpréter géométriquement le résultat : $f'(1)=0$

0.5 $b-$ Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et qu'elle est croissante sur $[1,+\infty[$

0.5 $c-$ Donner le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ et montrer que $f(x)\geqslant 0$ pour tour x de $]0,+\infty[$

1 3) Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 4) $a-$ Montrer que $u: x\longmapsto \dfrac{x^3}{3}-x$ est une fonction primitive de la fonction $v: x\longmapsto x^2-1$ sur $\mathbb{R}$

1 $b-$ En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^2\left(x^2-1\right)\ln(x)dx=\frac{2}{9}\left(1+3\ln(2)\right)$

0.25 $c-$ Calculer,en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(1,1,-1)$, $B(0,1,-2)$ et $C(3,2,1)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

0.5 1) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est égal à $\sqrt{3}$

0.75 2) $a-$ Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$ et vérifier que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

1 $b-$ vérifier que $d\big(\Omega,(ABC)\big)=\sqrt{2}$ puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon 1

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et orthogonale au plan (ABC)

0.25 $a-$ Montrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0.25 $b-$ Montrer que le triplet de coordonnées du point H, le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC), est $(2,0,0)$

0.25 $c-$ En déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : Nombres complexes

3 points

0.75 1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-12z+61=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que : $a=6-5i$, $b=4-2i$ et $c=2+i$

0.5 $a-$ Calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$ et en déduire que les points A, B et C sont alignés

0.5 $b-$ On considère la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $1+5i$.

Vérifier que l'affixe du point D, l'image du point C par la translation T, est $d=3+6i$

0.75 $c-$ Montrer que $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument du nombre complexe $-1+i$

0.5 $d-$ Déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)$

Exercice 3 :

Calcul de probabilités

3 points

Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher : 1 jeton portant le nombre 0, 5 jetons portant chacun le nombre 1 et 2 jetons portant chacun le nombre 2. On tire, au hasard, simultanément 3 jetons du sac.

On considère les événements suivants :

— A : "Obtenir 3 jetons portant des nombres différents deux à deux"

— B : "La sommes des nombres portés par les 3 jetons tirés égale 5"

— C : "La sommes des nombres portés par les 3 jetons tirés égale 4"

3 Montrer que $p(A) = \dfrac{5}{28}$, $p(b) = \dfrac{5}{56}$ et $p(C) = \dfrac{3}{8}$

Exercice 4 :

Suites numériques

3 points

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 11$ et $U_{n+1} = \dfrac{10}{11}U_n + \dfrac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.25 1) Vérifier que $U_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}\big(U_n - 12\big)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 2) $a-$ Montrer par récurrence que $U_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 $b-$ Montrer que la suite (U_n) est croissante

0.25 $c-$ Déduire que la suite (U_n) est convergente

3) On considère la suite numérique (V_n) définie par : $V_n = U_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 $a-$ Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{10}{11}$ puis exprimer V_n en fonction de n

0.75 $b-$ Montrer que $U_n = 12 - \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$