Royaume du Maroc Ministère de l' Education Nationale et de la Formation Professionnelle	Examen national commun du baccalauréat Matière : **Mathématiques** Filières : Sciences expérimentales et techniques Branches : toutes les branches	Session normale Juin 2013 Durée : 3h

Problème :

Etude de fonctions

8 points

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 e^x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (**unité** : 1 cm)

0.25 1) $a-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0.5 $b-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction

0.25 2) $a-$ Vérifier que $f(x) = x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 $b-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement ce résultat (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$)

0.75 3) $a-$ Montrer que $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1 $b-$ Montrer que la fonction f est croissante sur chacune des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$

0.5 $c-$ Donner la tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

1 4) $a-$ Montrer que $f''(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) a deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées

1 $b-$ Construire (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

0.5 5) $a-$ Montrer que $H : x \longmapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longmapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

0.75 $b-$ En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

0.5 $c-$ Montrer que l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $5(e-2)\, cm^2$

0.5 6) En utilisant la courbe (C), donner le nombre de solutions de l'équation $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 :

Géométrie dans l'espace

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(-1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $\Omega(1,1,-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3

1 1) $a-$ Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

1 $b-$ Montrer que $d\Big(\Omega, (OAB)\Big) = \sqrt{3}$ puis montrer que (OAB) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et orthogonale au plan (OAB)

0.5 $a-$ Montrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0.5 $b-$ Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ)

Exercice 2 :

Nombres complexes

3 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que : $a = 7 + 2i$, $b = 4 + 8i$ et $c = -2 + 5i$

0.75 1) $a-$ Vérifier que $(1+i)(-3+6i) = -9 + 3i$ et montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = 1 + i$

1 $b-$ En déduire que $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.75 $a-$ Montrer que l'affixe du point D, l'image du point A par la rotation R, est $d = 10 + 11i$

0.5 $b-$ Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés

Exercice 3 :

Calcul de probabilités

3 points

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches.

On tire, au hasard, simultanément 4 boules de l'urne

1.5 1) On considère les deux événements suivants :

— A : "Obtenir 2 boules rouges et 2 boules vertes"

— B : "Il n'existe aucune boule blanche parmi les 4 boules tirées"

Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{7}$ et que $p(B) = \dfrac{1}{3}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombres de boules blanches tirées

0.25 $a-$ Montrer que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont 0, 1, et 2

1.25 $b-$ Montrer que $p(X = 1) = \dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 :

Suites numériques

3 points

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_1 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{25}{10 - U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 1) Vérifier que $5 - U_{n+1} = \dfrac{5(5 - U_n)}{5 + (5 - U_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - U_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2) On considère la suite numérique (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{5}{5 - U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0.75 $a-$ Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{10 - U_n}{5 - U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ puis vérifier que $V_{n+1} - V_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 $b-$ Montrer que $V_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que $U_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0.25 $c-$ Déterminer $\lim U_n$