

**Exercice 1 :****Géométrie dans l'espace****3 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 3, 1)$, $B(-1, 3, 0)$ et $C(0, 5, 0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

- 1) a– Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés
- b– Montrer que $2x - y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2) a– Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2, 0, 0)$ et que son rayon est 3
- b– Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)
- c– Déterminer le triplet de coordonnées du point H le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S)

Exercice 2 :**Nombres complexes****3 points**

- 1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 2 = 0$
- 2) On considère le nombre complexe $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$
 - a– Montrer que le module du nombre u est $\sqrt{2}$ et que $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
 - b– En utilisant une forme trigonométrique du nombre u , montrer que u^6 est un nombre réel
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les deux points A et B d'affixes respectives a et b tels que : $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$
 Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
 - a– Exprimer z' en fonction de z
 - b– Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que OAB est un triangle équilatéral

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 13$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) Montrer par récurrence que $U_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- 2) Soit (V_n) la suite numérique telle que : $V_n = 14 - U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
 - a– Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis exprimer V_n en fonction de n
 - b– En déduire que $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (U_n)
 - c– Déterminer la plus petite valeur du nombre entier naturel n pour laquelle $U_n < 13.99$

Un sac contient 9 jetons, indiscernables au toucher, portant les nombres : 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1

- 1) On tire, au hasard, simultanément 2 jetons du sac.
Soit A l'événement : "La somme des deux nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1".
Montrer que $p(A) = \frac{5}{9}$
- 2) On considère le jeu suivant : Saïd tire, au hasard, simultanément 2 jetons du sac et il est considéré gagnant si chacun des jetons tirés porte le nombre 1
 - a– Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est $\frac{1}{6}$
 - b– Saïd refait le jeu précédent 3 fois (il remet les deux jetons tirés au sac à chaque fois).
calculer la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois

I– Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$

- 1) Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et en déduire que g est croissante sur $]0, +\infty[$
- 2) Vérifier que $g(1) = 0$ puis déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, +\infty[$

II– On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat
- 2) a– Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b– Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0$ (vous pouvez poser $t = \sqrt{x}$) puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
 - c– Déterminer la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

1.5

3) a– Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis en déduire que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

1

b– Donner le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0.75

4) Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on admet que la courbe (C) a un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer)

5) On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1 + \ln(x))dx$ et $J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$

0.5

a– Montrer que $H : x \mapsto x \ln(x)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto 1 + \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ puis en déduire que $I = e$

0.5

b– En utilisant une intégration par parties, montrer que $J = 2e - 1$

0.5

c– Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$