Royaume du Maroc Ministère de l' Education Nationale et de la Formation Professionnelle	Examen national commun du baccalauréat Matière : **Mathématiques** Filières : Sciences expérimentales et techniques Branches : toutes les branches	Session normale Juin 2015 Durée : 3h

Exercice 1 :

Géométrie dans l'espace

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $x+y+z+4=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

0.75 1) $a-$ Calculer la distance $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

0.5 $b-$ Vérifier que le point $H(0,-2,-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S)

2) On considère les deux points $A(2,1,1)$ et $B(1,0,1)$

0.75 $a-$ Vérifier que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et en déduire que $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

0.5 $b-$ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (OAB)

0.5 $c-$ Déterminer le triplet des coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S)

Exercice 2 :

Nombres complexe

3 points

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+10z+26=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que :

$$a=-2+2i, \quad b=-5+i, \quad c=-5-i \quad \text{et} \quad \omega=-3$$

0.5 $a-$ Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$

0.5 $b-$ En déduire la nature du triangle ΩAB

3) Soit le point D, l'image du point C par la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $6+4i$

0.5 $a-$ Montrer que l'affixe d du point D est $1+3i$

0.75 $b-$ Montrer que $\dfrac{b-d}{a-d}=2$ et en déduire que A est le milieu du segment $[BD]$

Exercice 3 :

Calcul des probabilités

3 points

Une urne contient 8 boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise 2 boules de l'urne .

1.5 1) On considère les deux événements suivants :

A :"Obtenir au moins une boule blanche" .

B :"Obtenir 2 boules de même couleur" .

Montrer que $p(A) = \dfrac{13}{28}$ et $p(B) = \dfrac{1}{4}$

2) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées .

0.5 $a-$ Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{1}{28}$

1 $b-$ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématiques $E(X)$

Problème :

Analyse

11 points

$I-$ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$

0.75 1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $\Big] -\infty, \ln(2)\Big]$ et croissante sur $\Big[\ln(2), +\infty\Big[$

0.5 2) Vérifier que $g(\ln(2)) = 2(1 - \ln(2))$ puis déterminer le signe de $g(\ln(2))$

0.5 3) Déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

$II-$ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (**unité** : 1 cm)

1 1) $a-$ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

(Remarquer que $e^x - 2x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

0.5 $b-$ Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats

0.75 2) $a-$ Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.75 $b-$ Etudier le signe de f' puis donner le tableau de variations de la fonction f

0.25 $c-$ Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère

1 3) Construire, dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la droite (T) et la courbe (C) .

(on donne $\dfrac{1}{e-2} \approx 1.4$ et on admet que la courbe (C) a deux points d'inflexion tels que : l'abscisse de l'un d'eux appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$)

0.75 4) $a-$ Montrer que $xe^{-x} \leqslant \dfrac{x}{e^x - 2x} \leqslant \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$

0.75 $b-$ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$

0.5 $c-$ Soit, en cm^2, $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que $1 - \dfrac{2}{e} \leqslant A(E) \leqslant \dfrac{1}{e-2}$

$III-$ Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ par : $h(x) = f(x)$

0.5 1) Monter que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

0.5 2) Construire, dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1}

IV- Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 1) montrer par récurrence que $U_n \leqslant 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 2) Montrer que la suite (U_n) est croissante (Remarquer, graphiquement, que $h(x) \geqslant x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$)

0.75 3) Déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite