



Exercice 1 :

Géométrie dans l'espace

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $x + y + z + 4 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, -1, -1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

- 0.75 1) a– Calculer la distance $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)
0.5 b– Vérifier que le point $H(0, -2, -2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S)
- 0.75 2) On considère les deux points $A(2, 1, 1)$ et $B(1, 0, 1)$

0.75 a– Vérifier que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

0.5 b– Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (OAB)

0.5 c– Déterminer le triplet des coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S)

Exercice 2 :

Nombres complexes

3 points

- 0.75 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$
0.5 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que :

$$a = -2 + 2i, \quad b = -5 + i, \quad c = -5 - i \quad \text{et} \quad \omega = -3$$

0.5 a– Montrer que : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$

0.5 b– En déduire la nature du triangle ΩAB

- 0.5 3) Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe $6 + 4i$

0.5 a– Montrer que l'affixe d du point D est $1 + 3i$

0.75 b– Montrer que $\frac{b - d}{a - d} = 2$ et en déduire que A est le milieu du segment $[BD]$

Une urne contient 8 boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

1) On considère les deux événements suivants :

A : "Obtenir au moins une boule blanche" .

B : "Obtenir 2 boules de même couleur" .

Montrer que $p(A) = \frac{13}{28}$ et $p(B) = \frac{1}{4}$

2) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées .

a- Montrer que $p(X = 2) = \frac{1}{28}$

b- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$

I- Soit g la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - 2x$

1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} puis en déduire que g est décroissante sur $] -\infty, \ln(2)]$ et croissante sur $[\ln(2), +\infty [$

2) Vérifier que $g(\ln(2)) = 2(1 - \ln(2))$ puis déterminer le signe de $g(\ln(2))$

3) Déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de \mathbb{R}

II- On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1 cm)

1) a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

(Remarquer que $e^x - 2x = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)$ pour tout x de \mathbb{R}^*)

b- Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats

2) a- Montrer que $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x de \mathbb{R}

d- Etudier le signe de f' puis donner le tableau de variations de la fonction f

c- Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère

3) Construire, dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la droite (T) et la courbe (C) .

(on donne $\frac{1}{e-2} \approx 1.4$ et on admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion tels que : l'abscisse de l'un d'eux appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\frac{3}{2}$)

0.75 4) a- Montrer que $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e - 2}$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$

0.75 b- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

0.5 c- Soit, en cm^2 , $A(E)$ l'air du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e - 2}$

III- Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $] - \infty, 0]$ par : $h(x) = f(x)$

0.5 1) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

0.5 2) Construire, dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1}

IV- Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5 1) montrer par récurrence que $U_n \leq 0$ pour tout n de \mathbb{N}

0.75 2) Montrer que la suite (U_n) est croissante (Remarquer, graphiquement, que $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $] - \infty, 0]$)

0.75 3) Dédire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite