Académie Casa- Settat
Délégation Ben M'sik
Lycée Abi Chouaib Doukkali

Résumé Maths Bac

2ème année

Baccalauréat

Sciences expérimentales
Sciences et technologies industrielles

Réalisé par :

EL KYAL MOHAMED

Sommaire

Signe de ax+b
Signe et factorisation de ax²+bx+c

EL KYAL MOHAMED

➢ Signe de ax+b (a ≠ 0)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

➢ Signe et factorisation du trinôme P(x)=ax²+bx+c (a ≠ 0)

<table>
<tr><th>$\Delta = b^2 - 4ac$</th><th>Solution de l'équation
$x \in \mathbb{R}$ $P(x) = 0$</th><th>Signe de $P(x)$</th><th>Factorisation de $P(x)$</th></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$S = \varnothing$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">Signe de a</td></tr></table></td><td>On ne peut pas factoriser $P(x)$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td>$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>$S = \{x_1 ; x_2\}$
avec :
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de $(-a)$</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table>(on suppose que $x_1 < x_2$)</td><td>$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
</table>

Si x_1 et x_2 sont deux solutions distinctes de l'équation : $x \in \mathbb{R}$ $ax^2 + bx + c = 0$

alors: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Identités remarquables
Domaine de définition d'une fonction

EL KYAL MOHAMED

➢ Identités remarquables :

Pour tous réels a et b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

➢ Domaine de définition d'une fonction :

Soient P et Q deux polynômes

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = \mathrm{P}(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{\mathrm{P}(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \mathrm{P}(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \mathrm{P}(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

Limites d'une fonction

➤ Limites et inverses des fonctions $x \mapsto x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Si n est un nombre pair alors:	Si n est un nombre impair alors:
$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

➤ Limites des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ / $-\infty$:

Limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré	Limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

➤ Limites des fonctions trigonométriques :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

➤ Limites des fonctions de type $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$
$\ell \geq 0$
$+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\sqrt{\ell}$
$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

➢ Théorème de comparaison :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \le v(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|f(x) - \ell\right| \le v(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le u(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

➢ Limites et opérations :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \left[g(x)+f(x)\right]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \left[g(x)\times f(x)\right]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I	F I

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité

EL KYAL MOHAMED

➢ Continuité en un point :

f est **continue** en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

➢ Continuité à droite - Continuité à gauche :

- f est **continue à droite** en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- f est **continue à gauche** en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
- f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en x_0

➢ Continuité sur un intervalle :

- f est continue sur un intervalle ouvert $\left]a,b\right[$ si f est continue en chaque élément de $\left]a,b\right[$
- f est continue sur un intervalle fermé $\left[a,b\right]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $\left]a,b\right[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b

➢ Opérations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I et k un réel

- Les fonctions $f+g$, $f \times g$, kf et f^n avec $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur I
- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I si g ne s'annule pas sur I

Conséquences :

- *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$*
- *Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition*
- *La fonction :* $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\left[0,+\infty\right[$
- *Les fonctions :* $x \mapsto \sin x$ *et* $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

➢ Composé de deux fonctions continues:

Si f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle $f(I)$, alors la fonction gof est continue sur I

➢ L'image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier :

Soit f est continue et strictement monotone sur un intervalle I

Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle $f\left(I\right)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$\left[a,b\right]$	$\left[f\left(a\right);f\left(b\right)\right]$	$\left[f\left(b\right);f\left(a\right)\right]$
$\left[a,b\right[$	$\left[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right);f\left(a\right)\right]$
$\left]a,b\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right);f\left(b\right)\right]$	$\left[f\left(b\right);\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)\right[$
$\left]a,b\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)\right[$
$\left[a,+\infty\right[$	$\left[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right);f\left(a\right)\right]$
$\left]a,+\infty\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)\right[$
$\left]-\infty,a\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right);f\left(a\right)\right]$	$\left[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right[$
$\left]-\infty,a\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to a^-}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right);\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right[$

➢ *Théorème des valeurs intermédiaires :*

Si f est continue sur un intervalle $\left[a,b\right]$, alors pour tout réel β compris entre $f\left(a\right)$ et $f\left(b\right)$ il existe au moins un réel α de l'intervalle $\left[a,b\right]$ tel que $f\left(\alpha\right)=\beta$

Si f est continue sur un intervalle $\left[a,b\right]$ telle que $f\left(a\right)\times f\left(b\right)<0$ alors l'équation $f\left(x\right)=0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left]a,b\right[$

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $\left[a,b\right]$ telle que $f\left(a\right)\times f\left(b\right)<0$ alors l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]a,b\right[$

➢ *Méthode de dichotomie :*

Soit f est fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $\left[a,b\right]$ telle que $f\left(a\right)\times f\left(b\right)<0$

l équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α dans $\left]a,b\right[$

Si $f\left(a\right)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$	Si $f\left(b\right)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$
Alors : $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$. On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$	Alors: $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$. On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$

On arrête le processus dès que l'amplitude de l'encadrement de α est inférieur à la précision souhaitée

Dérivabilité

EL KYAL MOHAMED

➢ Fonction dérivable en un point:

On dit qu'une fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

➢ L'équation de la tangente à une courbe :

Soit f fonction est dérivable en x_0

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0

est : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

➢ Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0, si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie

  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0, on le note $f'_d(x_0)$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0, si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie

  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0, on le note $f'_g(x_0)$

f dérivable en x_0,si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

➢ Dérivabilité et continuité :

Si f une fonction est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

➢ Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	

Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :

$\left(u+v\right)' = u' + v'$	$\left(ku\right)' = k\left(u\right)' \quad \left(k \in \mathbb{R}\right)$
$\left(uv\right)' = u'v + uv'$	$\left(u^n\right)' = nu'.u^{n-1}$
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\left(uov\right)' = \left[u'ov\right] \times v'$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **croissante** sur $I \iff \forall x \in I \quad f'\left(x\right) \geq 0$
- f est **décroissante** sur $I \iff \forall x \in I \quad f'\left(x\right) \leq 0$
- f est **constante** sur $I \iff \forall x \in I \quad f'\left(x\right) = 0$

Interprétation géométrique et dérivabilité :

La limite	Dérivabilité en x_0	Interprétation géométrique : $\left(C_f\right)$ admet
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \underset{(a \neq 0)}{a}$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \underset{(a \neq 0)}{a}$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi- tangente à droite au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$		Une demi- tangente horizontale à droite au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi- tangente verticale à droite au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le bas
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \underset{(a \neq 0)}{a}$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi- tangente à gauche au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi- tangente verticale à gauche au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le bas

➢ Axe de symétrie – Point de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est **un axe de symétrie** de la courbe $\left(C_f\right)$ si :

- $\forall x \in D_f \qquad \left(2a - x\right) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \qquad f\left(2a - x\right) = f\left(x\right)$

Le point $I\left(a, b\right)$ est **un point de symétrie** de la courbe $\left(C_f\right)$ si :

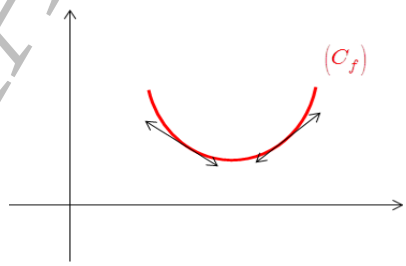
- $\forall x \in D_f \qquad \left(2a - x\right) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \qquad f\left(2a - x\right) + f\left(x\right) = 2b$

➢ Concavité et point d'inflexion d'une courbe :

*Une fonction est **convexe** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes*

Si $\forall x \in I \qquad f''\left(x\right) \geq 0$

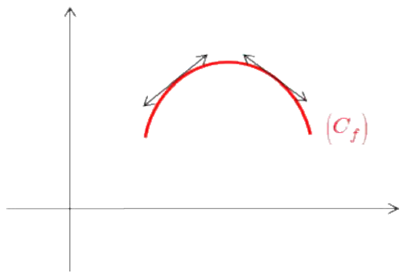
alors la courbe $\left(C_f\right)$ est convexe sur l'intervalle I



*Une fonction est **concave** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes*

Si $\forall x \in I \qquad f''\left(x\right) \leq 0$

alors la courbe $\left(C_f\right)$ est concave sur l'intervalle I



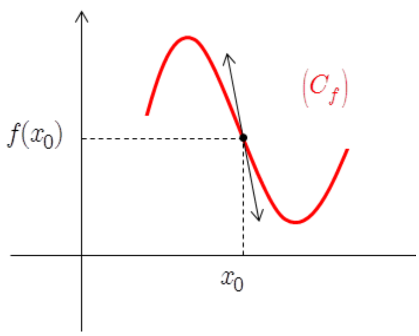
*Un **point d'inflexion** d'une courbe $\left(C_f\right)$ est le point ou la courbe $\left(C_f\right)$ change de concavité en ce point*

Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0

alors la courbe $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Si f' s'annule sans changer de signe en x_0

alors la courbe $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion d'abscisse x_0



Branches infinies

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

→ (C_f) admet Une asymptote horizontale d'équation: $y = a$ au voisinage de ∞

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ → (C_f) admet Une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$ au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \underset{(a\neq 0)}{a}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$ → (C_f) admet Une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$ au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$ → (C_f) admet Une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = ax$ au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ → (C_f) admet Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ → (C_f) admet Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

→ (C_f) admet Une asymptote verticale d'équation: $x = a$

Fonction réciproque

EL KYAL MOHAMED

- **Propriété :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors f admet **une fonction réciproque,** notée f^{-1},définie sur l'intervalle $f\left(I\right)$

et on a : $$\begin{cases} f^{-1}\left(x\right)=y \\ x\in f\left(I\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(y\right)=x \\ y\in I \end{cases}$$

- **Détermination de l'expression de $f^{-1}\left(x\right)$:**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x un élément de $f\left(I\right)$ et y un élément de I tel que: $f^{-1}\left(x\right)=y$

On a : $f^{-1}\left(x\right)=y \Leftrightarrow f\left(y\right)=x$ et en résolvant l'équation $f\left(y\right)=x$ d'inconnue y

On déduit l'expression de $f^{-1}\left(x\right)$ pour tout x de $f\left(I\right)$

- **Continuité de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors une fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\left(I\right)$

- **Dérivabilité de la fonction réciproque :**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

soit x_0 un élément de I et $y_0=f\left(x_0\right)$

si f est dérivable en x_0 et si $f'\left(x_0\right)\neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0

et on a : $$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f\left(I\right)$ et on a :

$$\forall x\in f\left(I\right) \qquad \left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(x\right)\right]}$$

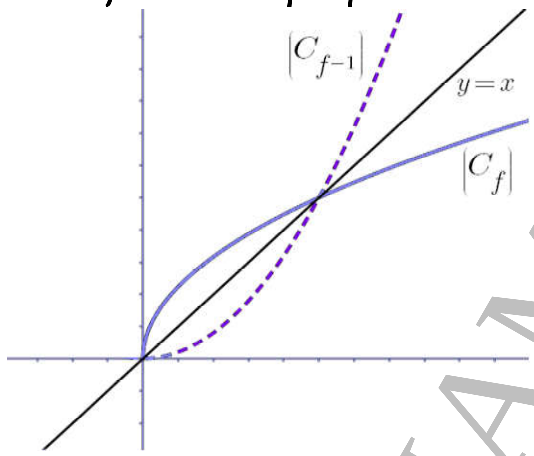
Monotonie de la fonction réciproque :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors une fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$

et varie dans le même sens que f

La courbe représentative de la fonction réciproque :



Dans un repère orthonormé $(C_{f^{-1}})$ est le symétrique de (C_f) par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation: $y = x$)

Remarques:

La courbe (C_f)	⇒	La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a,b) \in (C_f)$		$A'(b,a) \in (C_{f^{-1}})$
admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$		admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$
admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (on détermine l'expression de y à partir de la relation: $x = ay + b$)
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale		admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale		admet une tangente (ou demi-tangente) verticale

Fonction racine n-ième

Définition :

Soit n un entier naturel non nul

La fonction : $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0;+\infty[$

elle admet une fonction réciproque définie sur $[0;+\infty[$,nommée racine n-ième

et que l'on note $\sqrt[n]{\ }$ et on a : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

Propriétés:

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \qquad (y \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$

Ensemble de définition :

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est :

$D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

Limites:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	⇒	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$\ell \geq 0$		$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$		$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité :

Si f une fonction définie ,positive et continue sur un intervalle I

alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I

Dérivée :

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I

alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \qquad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{\left[u(x)\right]^{n-1}}}$

Résolution de l'équation $x \in \mathbb{R} \qquad x^n = a \qquad (a \in \mathbb{R})$:

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\right\}$	$S = \varnothing$

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:

Soit un x réel strictement positif et un r nombre rationnel

On pose $r = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

On a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Remarques :

- $\sqrt[n]{u(x)} = \left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times \left(u(x)\right)' \times \left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels x et y positifs et pour tous rationnelles r et r'

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $\left(x \times y\right)^r = x^r \times y^r$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
- $\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

➢ Suite arithmétique – Suite géométrique :

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + \left(n - p\right) r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + ... + u_n = \left(n - p + 1\right)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + ... + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}\right)$
a ,b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

➢ Suite majorée, minorée, bornée :

Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite numérique

- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **majorée** par un nombre réel $M \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **minorée** par un nombre réel $m \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **bornée** si $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est majorée et minorée

➢ Monotonie d'une suite :

Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite numérique

- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **croissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **décroissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est **constante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

➢ Limite de la suite $\left(n^\alpha\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

- **Limite de la suite $\left(q^n\right)$ avec $q \in \mathbb{R}$:**

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

- **Critère de convergence d'une suite :**

  - *Toute suite croissante et majorée est convergente*
  - *Toute suite décroissante et minorée est convergente*

$$\left.\begin{array}{l} \left|u_n - \ell\right| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- **Suite de type $v_n = f\left(u_n\right)$:**

Si $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite convergente de limite ℓ et si f une fonction continue en ℓ alors la suite $\left(v_n\right)$ définie par: $v_n = f\left(u_n\right)$ est convergente de limite $f(\ell)$

- **Suite de type $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$:**

Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ *où f une fonction*

Si :

- *f une f continue sur un intervalle I*
- *$f\left(I\right) \subset I$*
- *$a \in I$*
- *$\left(u_n\right)$ une convergente*

alors : la limite ℓ de la suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est solution de l'équation : $f\left(x\right) = x$

Fonctions primitives

➢ *Définition :*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

On dit que F est **une fonction primitive** de f sur I si :

- F est derivable sur I
- $\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)$

➢ *Existence et unicité des primitives:*

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Si f admet une primitive F sur un intervalle I alors toute fonction G définie sur I

par : $G(x) = F(x) + k \qquad (k \in \mathbb{R})$ est aussi une primitive de f sur I

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I

soit x_0 un élément de I et y_0 un réel, Il existe une seule primitive F de f sur I

vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$

➢ *Propriété de linéarité des primitives :*

Si F et G des fonctions primitives respectives de f et g sur un intervalle I

et si k un réel alors :

- $(F + G)$ est une fonction primitive de $(f + g)$ sur I
- kF est une fonction primitive de kf sur I

➢ ***Formulaire: primitives des fonctions usuelles :***

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
e^x	$e^x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$

$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$

$(k \in \mathbb{R})$

➢ ***Primitives des fonctions composés :***

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$u'(x) \times [u(x)]^r$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$u'(x) \times \sin[u(x)]$	$-\cos[u(x)] + k$
$u'(x) \times \cos[u(x)]$	$\sin[u(x)] + k$

$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$

$(k \in \mathbb{R})$

Calcul intégral

EL KYAL MOHAMED

➢ Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

L'intégrale de f de a à b est le nombre réel : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

➢ Propriétés :

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Linéarité: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $(k \in \mathbb{R})$ $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	
Relation de Chasles: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	

➢ Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur segment $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

➢ Intégrale et ordre :

$$si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq 0 \text{ , } alors \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x) \text{ , } alors \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

➢ Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)\,dx$$

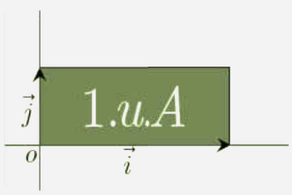
➢ Calcul d'aires :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(o,\vec{i},\vec{j})$

Soit I et J deux points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

L'unité d'aire, notée $u.A$, est l'aire du rectangle bâti à partir des points O , I et J

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



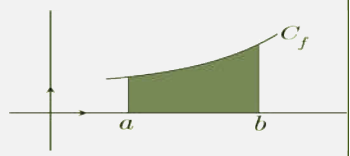
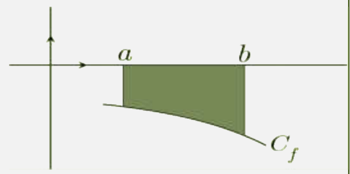
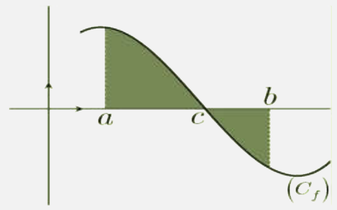
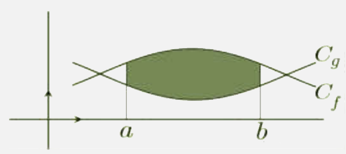
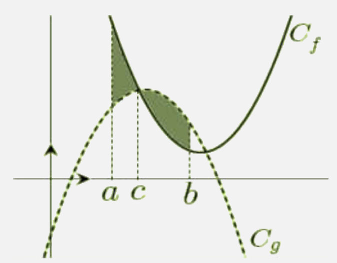
L'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left(\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| dx\right).u.A$$

L'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left(\int_a^b \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| dx\right).u.A$$

- ***<u>Cas particuliers :</u>***

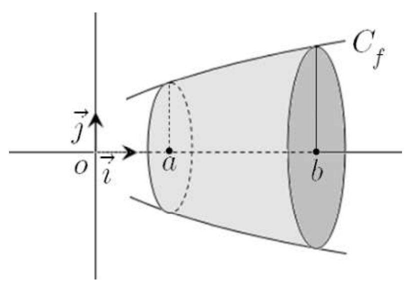
Figure illustrative	Remarque	L'aire du domaine hachuré sur la figure
	f est positive sur $\left[a;b\right]$	$\left(\int_a^b f\left(x\right) dx\right).u.A$
	f est négative sur $\left[a;b\right]$	$\left(\int_a^b -f\left(x\right) dx\right).u.A$
	• f est positive sur $\left[a;c\right]$ • f est négative sur $\left[c;b\right]$	$\left(\int_a^c f\left(x\right) dx + \int_c^b -f\left(x\right) dx\right).u.A$
	$\left(C_f\right)$ est au dessus de $\left(C_g\right)$ sur $\left[a;b\right]$	$\left(\int_a^b \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) dx\right).u.A$
	• $\left(C_f\right)$ est au dessus de $\left(C_g\right)$ sur $\left[a;c\right]$ • $\left(C_f\right)$ est au dessous de $\left(C_g\right)$ sur $\left[c;b\right]$	$\left(\int_a^c \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_c^b \left(g\left(x\right) - f\left(x\right)\right) dx\right).u.A$

- ***<u>Calcul de volumes :</u>***

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\left(C_f\right)$ sur $\left[a;b\right]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est:

$$V = \left(\int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx\right) u.v$$

$u.v$: unité de volume



➢ Fonction Logarithme népérienne :

- **Définition :**

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 et notée **ln**

- **Conséquences et propriétés :**

$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

- **Domaine de définition :**

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_u \text{ et } u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	

- **Limites usuelles :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^n \ln x) = 0$	
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

- **Continuité:**

La fonction ln est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I et si u est continue sur I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur I

- **Dérivabilité :**

La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$

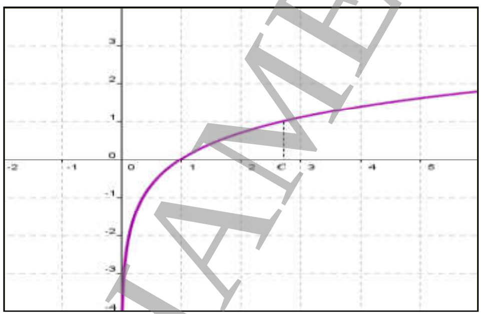
et on a : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I
et si u est dérivable sur I
alors la fonction $x \mapsto \ln\left[u\left(x\right)\right]$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \quad \left(\ln\left[u\left(x\right)\right]\right)' = \dfrac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}$

- **Signe et représentation graphique de ln :**

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	



➢ Fonction Logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

- **Définition :**

La fonction **logarithme de base** a est la fonction
définie par : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \ell og_a\left(x\right) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier : si a=10, ℓog_a est le logarithme décimal. On le note ℓog

- **Conséquences et propriétés :**

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \forall y \in \left]0;+\infty\right[$ $\ell og_a\left(xy\right) = \ell og_a\left(x\right) + \ell og_a\left(y\right)$ $\ell og_a\left(x^r\right) = r\ell og_a\left(x\right) \quad \left(r \in \mathbb{Q}\right)$ $\ell og_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell og_a\left(x\right)$ $\ell og_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a\left(x\right) - \ell og_a\left(y\right)$	$\ell og_a\left(1\right) = 0$ $\ell og_a\left(a\right) = 1$ $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \forall y \in \left]0;+\infty\right[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ell og_a\left(x\right) = \ell og_a\left(y\right) \Leftrightarrow x = y$ $\ell og_a\left(x\right) = r \Leftrightarrow x = a^r$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\ell og_a\left(x\right) > \ell og_a\left(y\right) \Leftrightarrow x < y$	$\ell og_a\left(x\right) > \ell og_a\left(y\right) \Leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a\left(x\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a\left(x\right) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a\left(x\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a\left(x\right) = -\infty$
$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\quad \left[\ell og_a\left(x\right)\right]' = \dfrac{1}{x \ln a}$	

Fonctions exponentielles

Fonction exponentielle népérienne :

- **Définition :**

> La fonction **exponentielle népérienne,** notée $\exp$, est la fonction réciproque de la fonction ln . On pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

- **Conséquences et propriétés :**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad ln(e^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad e^x \times e^y = e^{x+y}$
$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\quad e^{lnx} = x$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)^r = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q})$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \left]0;+\infty\right[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = lny$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

- **Domaine de définition :**

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_u\}$

- **Limites usuelles :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n e^x) = 0$	
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$		

- **Continuité:**

> La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

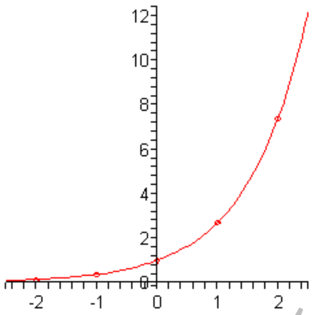
> Si u est une fonction continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur I

- ***Dérivabilité :***

la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et on a: $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(e^x\right)' = e^x$

Si u est une fonction est dérivable sur un intervalle I
alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I
et on a: $\forall x \in I \qquad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

- ***Représentation graphique de exp :***



➢ Fonction exponentielle de base $a \in]0;+\infty[$:

- ***Définition :***

La fonction exponentielle de base a est la fonction définie par :
$\forall x \in]0;+\infty[\qquad a^x = e^{x\ell og(x)}$

- ***Conséquences et propriétés :***

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \qquad a^x \times a^y = a^{x+y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x = e^{x\ln a}$ $\ell og_a\left(a^x\right) = x$
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(a^x\right)^r = a^{rx} \quad \left(r \in \mathbb{Q}\right)$	$\forall x \in]0;+\infty[\qquad a^{\ell og_a(x)} = a$
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \qquad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \ell og_a(y)$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$	
$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x$	

Nombres complexes

EL KYAL MOHAMED

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

➢ ***Définition et propriétés :***

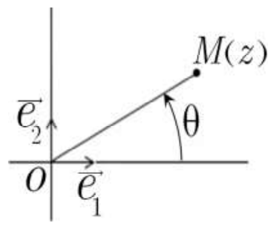
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- ***La forme algébrique*** du nombre complexe z est : $a + ib$.
- ***La partie réelle*** du nombre complexe z est : $Re(z) = a$.
- ***La partie imaginaire*** du nombre complexe z est : $Im(z) = b$.
- Le nombre complexe z est ***imaginaire pur*** si $Re(z) = 0$.
- ***Egalité*** de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z')$
- ***Le conjugué*** du nombre complexe z est : $\overline{z} = a - ib$
- ***Le module*** du nombre complexe z est : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ***L'image*** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a,b)$, noté $M(z)$
- ***L'affixe*** du point $M(a,b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté z_M
- ***L'affixe*** du vecteur $\vec{u}(a,b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- ***L'affixe*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- ***L'argument*** du nombre complexe non nul z est une mesure θ de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$

  noté $arg z$

  on a $arg\, z \equiv \theta [2\pi]$

  $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$



- ***La forme trigonométrique*** du nombre complexe non nul z est :

  $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$$

  avec $r = |z|$ et $arg\, z \equiv \theta [2\pi]$

  $[r,\theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

- ***La forme exponentielle*** du nombre complexe non nul z est : $z = re^{i\theta}$

  avec $r = |z|$ et $arg\, z \equiv \theta [2\pi]$

➢ **Propriétés:**

	Conjugué	Module	Argument
Opposé	$\overline{-z} = -\overline{z}$	$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$arg(-z) \equiv (\pi + arg\, z)[2\pi]$
Conjugué	$\overline{\overline{z}} = z$	$\lvert \overline{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$arg(\overline{z}) \equiv -arg\, z[2\pi]$
Produit	$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$arg(zz') \equiv (arg\, z + arg\, z')[2\pi]$
Puissance	$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$arg(z^n) \equiv n\, arg\, z\ [2\pi]$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg\, z[2\pi]$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (arg\, z - arg\, z')\ [2\pi]$
Somme	$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$		

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Opposé	$-[r,\theta] = [r, \pi + \theta]$	$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
Conjugué	$\overline{[r,\theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
Produit	$[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr';\theta + \theta']$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance	$[r,\theta]^n = [r^n; n\theta]$	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)}$
Inverse	$\frac{1}{[r;\theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

• $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$ • $z - \overline{z} = 2\,Im(z)$ • $z\overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$ • $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$	• z *est réel* $\Leftrightarrow \overline{z} = z$ • z *est réel* $\Leftrightarrow arg\, z = k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ • z *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$ • z *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow arg\, z = \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

Formule de Moivre :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$$

Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Equations du second degré à coefficients réels :

L'équation :		Ensemble de solution:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$	$\Delta > 0$	$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Nombres Complexes et géométrie:

Notion complexe :	Relation géométrique :
$\left\lvert z_B - z_A \right\rvert$	la distance AB
$\left\lvert z - z_A \right\rvert = r \quad \left(r > 0\right)$	• $AM = r$ • M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\left\lvert z - z_A \right\rvert = \left\lvert z - z_B \right\rvert$	• $AM = BM$ • M appartient à la médiatrice de $\left[AB\right]$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I milieu de $\left[AB\right]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A,B et C trois points alignés
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right)\left[2\pi\right]$	mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

- ***d'un triangle:***

	Nature du triangle ABC
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$	*ABC est un triangle rectangle en A*
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \theta\right]$	*ABC est un triangle isocèle en A*
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$	*ABC est un triangle isocèle et rectangle en A*
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{3}\right]$	*ABC est un triangle équilatéral*

- ***Ecritures complexes des transformations du plan:***

Transformations:	Ecriture complexe :
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

- ***Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes :***

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Soit $M'(z')$ *l'image d'un point* $M(z)$ *par une transformation* F

<table>
<tr><th colspan="3">L'expression complexe du transformation F</th><th>Nature du transformation F</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$z' = az + b$
avec $(a;b) \in \mathbb{C}^2$
$(a \neq 0)$</td><td colspan="2">$a = 1$</td><td>F est une translation
de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a \neq 1$</td><td>$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$</td><td>F est une homothétie
de rapport a
et de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
(ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)</td></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$
avec $|a| = 1$</td><td>F est une rotation
d'angle : $\theta \equiv \arg a \left[2\pi\right]$
et de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
(ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)</td></tr>
</table>

- **Résolution de l'équation différentielle :** $y' = ay + b$

Equation différentielle	Solution générale de l'équation différentielle
$y' = ay + b \qquad (a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

- **Résolution de l'équation différentielle :** $ay'' + by' + cy = 0$

Equation différentielle	Equation caractéristique	L'équation caractéristique admet		Solution générale de l'équation différentielle
$ay'' + by' + cy = 0$	$ar^2 + br + r = 0$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	Une solution réelle unique r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p - iq$ et $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Dénombrement

EL KYAL MOHAMED

Cardinal d'un ensemble :

Soit E un ensemble fini
Le **cardinal** de E est le nombre d'éléments de E , on le note $card\,E$

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini
$Card(A\cup B)=CardA+CardB-Card(A\cap B)$

Principe fondamental du dénombrement :

Soit une expérience peut être réalisée en p choix $(p\in\mathbb{N}^*)$

Si le premier choix peut être réalisé en n_1 façons différentes

et le second choix peut être réalisé en n_2 façons différentes

.
.
.

et le p-ème choix peut être réalisé en n_p façons différentes

alors le nombre façons différentes de réaliser cette expérience
est ***le produit :*** $n_1\times n_2\times n_3\times\ldots\times n_p$

Les nombres : $n!$, A_n^p et C_n^p

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$	
$A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
$C_n^{p-1}+C_n^p=C_{n+1}^p$	$C_n^p=C_n^{n-p}$
$C_n^n=1$	$C_n^{n-1}=n$

Types de tirages :

On tire p objets parmi n objets

Type de tirage:	Nombre de tirages possible est :	L'ordre :
simultané	$C_n^p \quad (p\le n)$	n'a pas d'importance
Successif avec remise	n^p	est important
Successif sans remise	$A_n^p \quad (p\le n)$	est important

Probabilités

EL KYAL MOHAMED

Probabilités d'un ensemble fini:

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent, on la note $p(A)$

Propriétés :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

L'événement:	Probabilités:
A	$0 \leq p(A) \leq 1$
$\overline{A}$	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
$A \cup B$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (A et B sont incompatibles)

S'il y a **équiprobabilité** alors pour tout événement A de Ω, on a:

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ des\ cas\ favorables}{nombre\ des\ cas\ possibles}$$

Loi d'une variable de probabilité aléatoire:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

Pour définir la loi de probabilité de la variable X sur Ω on suit les étapes suivantes :

1) On détermine $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X

2) On calcule pour chaque valeur x_i sa probabilité $p_i = p(X = x_i)$ avec $i \in \{1; 2; ...; n\}$

3) On résume la loi de probabilité de la variable X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Probabilité conditionnelle :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que: $p(A) \neq 0$

La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre :

$$p_A(B) = p\left(B/A\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Evénements indépendants :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire

A et B **sont indépendants** $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p\left(X = x_i\right)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

L'espérance mathématique de la variable X	$E\left(X\right) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + ... + x_n \times p_n$
La variance de la variable X	$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2$
L'écart -type de la variable X	$\sigma\left(X\right) = \sqrt{V\left(X\right)}$

Epreuve répétée :

Soit p la probabilité d'un événement A, lors d'une expérience aléatoire

si on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques

alors la probabilité de réalisation de A exactement k fois durant les n épreuves est :

$$C_n^k \left(p\right)^k \left(1-p\right)^{n-k} \qquad \left(k \leq n\right)$$

Loi binomiale :

Soit p la probabilité d'un événement A, lors d'une expérience aléatoire

on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques

si la variable aléatoire X, égale au nombre de réalisation de A durant les n épreuves

alors la loi de probabilité de la variable X est donnée par :

$$\forall k \in \left\{0;1;2;...;n\right\} \qquad p\left(X = k\right) = C_n^k \times p^k \times \left(1-p\right)^{n-k}$$

On dit que la variable X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on a

$$E\left(X\right) = n \times p \quad \text{et} \quad V\left(X\right) = np\left(1-p\right)$$

Géométrie dans l'espace

EL KYAL MOHAMED

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

➢ Expressions analytiques :

Soient $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ et $\vec{v}\left(a',b',c'\right)$ deux vecteurs

- **Produit scalaire :** $\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'+cc'$
- **Norme :** $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- **Produit vectoriel :** $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

➢ Aire d'un triangle :

L'aire d'un triangle ABC est: $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

➢ Distances :

La distance entre deux points A et B est :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

La distance du point M au plan $\left(P\right)$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ est:

$$d\left(M;\left(P\right)\right)=\frac{\left|ax_M+by_M+cz_M+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La distance du point M à la droite $\Delta\left(A,\vec{u}\right)$ est: $d\left(M,\left(\Delta\right)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

➢ Equation cartésienne d'un plan :

$\vec{n}\left(a,b,c\right)$ est un vecteur normal au plan $\left(P\right)\Leftrightarrow\left(P\right):ax+by+cz+d=0$

Si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les points A, B et C ne sont pas alignés

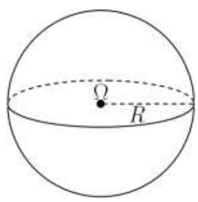
Dans ce cas : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $\left(ABC\right)$ et l'équation cartésienne du plan $\left(ABC\right)$ peut être déterminé à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M\in\left(ABC\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

➢ Equation cartésienne d'une sphère:

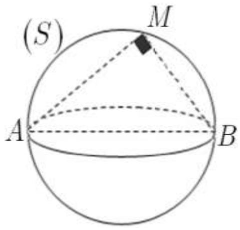
L'équation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega\left(a,b,c\right)$ et de rayon R est :

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$$



➤ Ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$

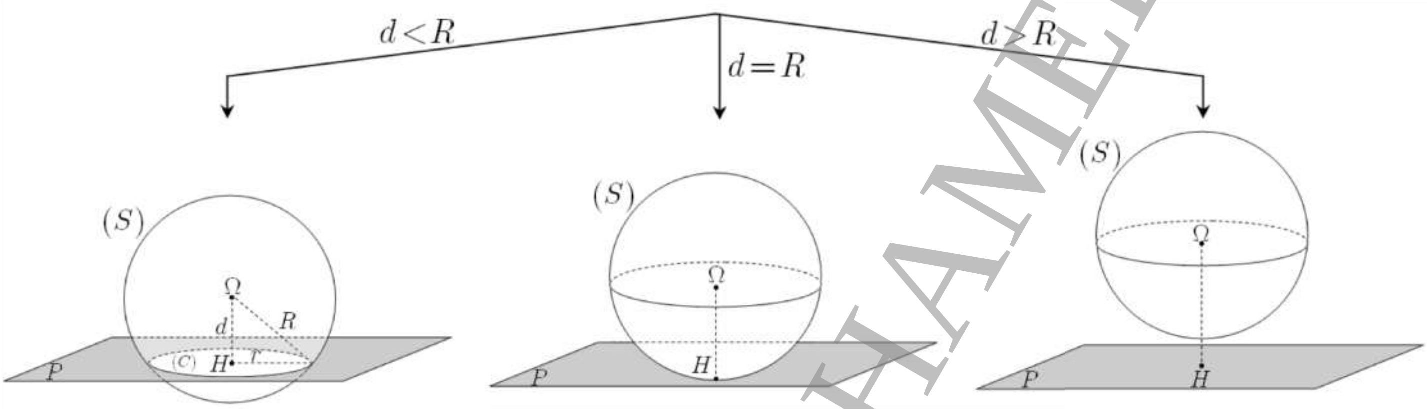
L'ensemble des points de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$



➤ Intersection d'une sphère et d'un plan :

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et le plan (P)

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P). On pose : $d = \Omega H = d(\Omega;(\mathrm{P}))$



(P) coupe (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

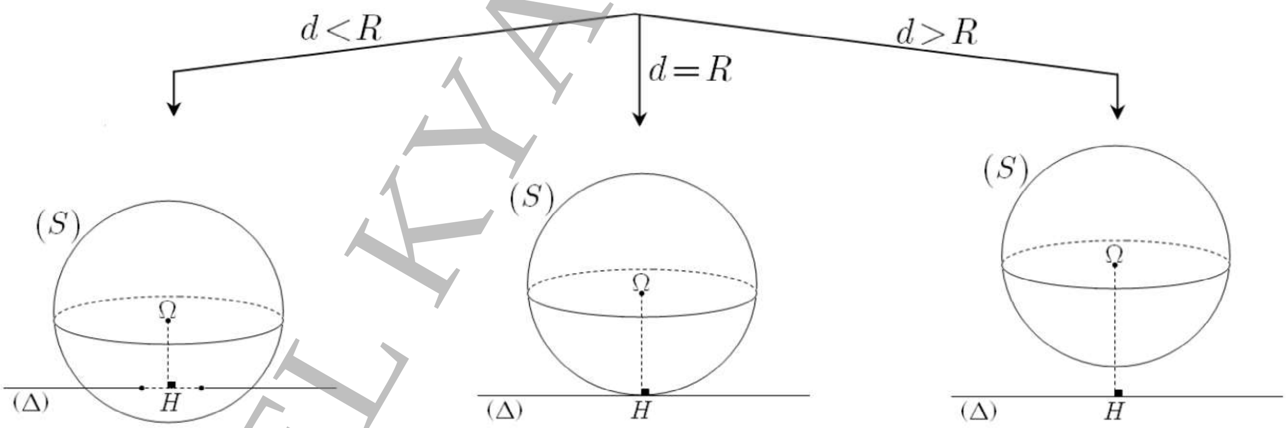
(P) est tangent à (S) en H

(P) ne coupe pas (S)

➤ Intersection d'une sphère et d'une droite :

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et la droite (Δ).

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (Δ). On pose : $d = \Omega H = d(\Omega;(\Delta))$



(Δ) coupe (S) en deux points distincts

(Δ) est tangente à (S) en H

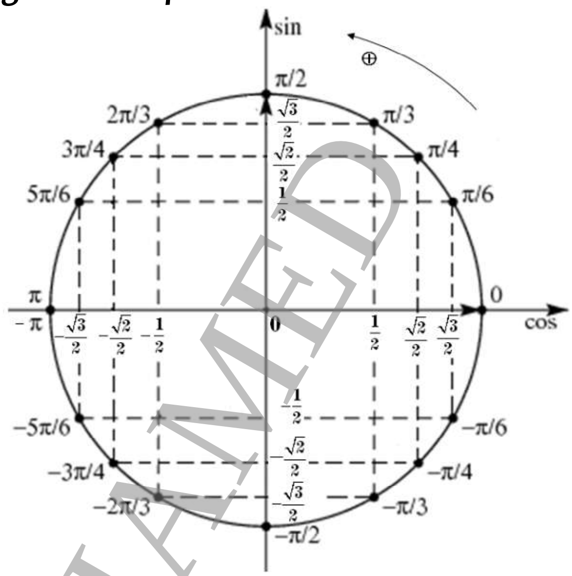
(Δ) ne coupe pas (S)

Trigonométrie

EL KYAL MOHAMED

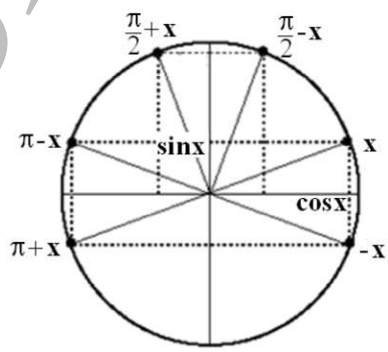
➢ *Tableau des valeurs remarquables et cercle trigonométrique:*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\ x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\ x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



➢ *Les formules des angles associés :*

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$



$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos\left(x + 2k\pi\right) = \cos x$ $\sin\left(x + 2k\pi\right) = \sin x$ $\tan\left(x + k\pi\right) = \tan x$

➢ *Equations trigonométriques :*

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \left(\pi - a\right) + 2k\pi$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$ $\quad\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

Formules de duplication :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \times \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

on pose: $t = \tan\frac{a}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Transformation des produits- transformation des sommes :

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$
$$\cos a \times \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Transformation de $a\cos x + b\sin x$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

avec α *un réel tel que :* $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *et* $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$