SIMILI 2

Exercice 1 (3points)

I) 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 12 = 0$.

2) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2\sqrt{3}y' + 12y = 0$

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = \sqrt{3} + 3i$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 3 - i\sqrt{3}$

1) Ecrire a et b sous forme exponentielle
2) Montrer que $\left(a^{2018} + b^{2018}\right) \in \mathbb{R}$
3) Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R de centre le point O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$
4) Montrer que l'affixe du point D l'image du point B par la rotation R' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $c = 3 + i\sqrt{3}$
5) Montrer que $d = c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, en déduire la nature du tringle OCD
6) Déterminer l'ensemble de points M(z) qui vérifient $|z-b| = |z-c|$

Exercice 2 (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(1 ;0 ;0) , B(0 ; 2 ; 0) , C(0 ; 0 ; 3) .

1) a- Déterminer le triplet des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   b- Déduire que les points A,B et C ne sont pas alignés et calculer l'aire du triangle ABC.
   c- Vérifier que 6x+3y+2z-6=0 est une équation cartésienne du plan (ABC)
2) a-Vérifier que $d\left(O;(ABC)\right) = \frac{6}{7}$
   b- Déterminer une équation de la sphère (S) de centre O et tangente au plan (ABC)
   c-Déterminer le triplet de coordonnés du point tangent du plan (ABC) et de la sphère (S)

Exercice 3 (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout n appartient à $\mathbb{N}$ $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$

1) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n
2) a-Montrer que (u_n) est croissante en déduire que $u_n \geq \frac{3}{2}$ pour tout entier naturel n

   b- En déduire (u_n) est convergente
3) a- Montrer que $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$ pour tout entier naturel n

   b- Montrer par récurrence que $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ pour tout entier naturel n

   c- Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4 (3 points)

Un sac contient 4 boules blanches numérotés 1-1-1-2 et 3 boules noires numérotés 1-1-2, toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On considère l'expérience suivant : on tire au hasard et simultanément 2 boules du sac

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :

   A " On tire deux boules blanches "

   B " La somme des numéros portés par les 2 boules tirés est égale à 3 "
2) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A

   Montrer que $p(X = 1) = \frac{150}{343}$ puis déterminer la loi de la variable aléatoire X

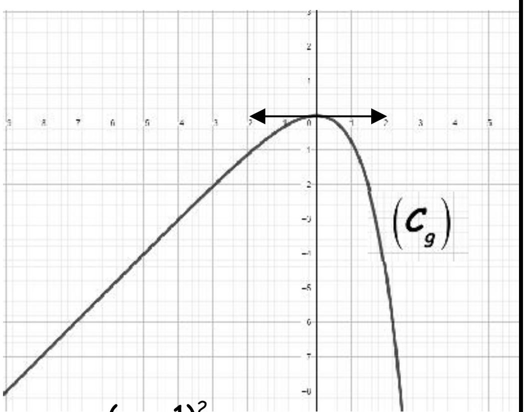
Exercice 5 (8 points)

I- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x + 1 - e^x$$

1) Vérifier que g(0)=0
2) A partir de la courbe représentative (C_g) de la fonction g (voir figure ci-contre)

Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartient à $\mathbb{R}$



II- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} - 1$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2cm)

1) a-Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b- Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(x + 2 + \dfrac{1}{x}\right)e^{-x} - \dfrac{1}{x}$ pour tout x appartient à $\mathbb{R}^*$

c- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement ce résultat

2) a- Montrer que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} + 2\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x} - 1$ pour tout x appartient à $\mathbb{R}$

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$, en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) a- Montrer que $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ pour tout x appartient à $\mathbb{R}$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartient à $\mathbb{R}$

c- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\sim$ telle que $\sim \in \left]2;3\right[$

5) a- Montrer la droite (Δ) d'équation y=x est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b- Montrer que $f(x) - x = e^{-x}(x + 1)g(x)$ pour tout x appartient à $\mathbb{R}$

c- Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartient à $\left[-1;+\infty\right[$ et que $f(x) \geq x$ pour tout x appartient à $\left]-\infty;-1\right]$

d- En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)

6) Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $\sim \simeq 2,5$ et on admet que (C_f) coupe l'axe des abscisses aussi au point d'abscisse $\simeq -1,5$)

7) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 + 2x \geq e^x - 1$

8) On considère la fonction h la restriction de la fonction f sur $\left[1;+\infty\right[$

a- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et que $\left(h^{-1}\right)'(0) = \dfrac{(\sim + 1)^2}{1 - \sim^2}$

c- Construire $\left(C_{h^{-1}}\right)$ la courbe de h^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

9) a- Montrer que la fonction $F : x \mapsto -(x^2 + 4x + 5)e^{-x} - x$ est une fonction primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

b- Calculer en cm² l'aire (A) du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1

III- On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n

1) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n

2) Montrer que (u_n) est décroissante et en déduire que la suite (u_n) est convergente

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer la limite de la suite (u_n)