3.c) Montrons que M et N sont équiprobables :

On a : $P(M) = P(\{X=2\} \cup \{X=4\})$

$= P(X=2) + P(X=4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

(car $\{X=2\} \cap \{X=4\} = \emptyset$)

et : $P(N) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

d'où : $P(N) = P(M) = \frac{1}{3}$

c.à.d : M et N sont équiprobables

H. Rachad

- **Problème :**

1. a) Soit $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$

$$= 2 - \frac{2}{x} + 1 - 2\ln x + \ln^2 x$$

$$= \frac{2x - 2 + x - 2x\ln x + x\ln^2 x}{x}$$

Alors : $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = \dfrac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$

b. Montrons que : $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

On pose : $t = \sqrt{x}$

donc si : $x \to 0^+ \Rightarrow t \to 0^+$

et de même on a : $\ln(x) = \ln(t^2) = 2\ln(t)$

donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln^2(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} t^2 \ln^2(t^2)$

$$= \lim_{t \to 0^+} (2t\ln(t))^2 = 0$$

// car : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ //

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

- Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

On pose : $t = \sqrt{x}$

donc si : $x \to +\infty \Rightarrow t = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln^2(t^2)}{t^2}$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{2^2\ln^2(t)}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 4\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^2 = 0$$

// car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ //

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

H.Rachad

c. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$

$= -\infty$

puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{2}{x} = -\infty$

et : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln^2(x) = 0$

$\Rightarrow$ Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

d. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{2}{x} + (1 - \ln x)^2 = +\infty$

Car : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty \end{cases}$

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + 2\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln^2(x)}{x}$

$= 0$

car : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2- Montrons que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{2(1 - x + x\ln x)}{x^2}$

Soit $x \in]0, +\infty[$:

On a $f'(x) = \left(2 - \dfrac{2}{x} + (1 - \ln x)^2\right)'$

$= -\left(\dfrac{2}{x}\right)' + 2(1 - \ln x)'(1 - \ln x)$

$= \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$

$= \dfrac{2 - 2x(1 - \ln x)}{x^2}$

$\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \dfrac{2 - 2x + 2x\ln x}{x^2} = \dfrac{2(1 - x + x\ln x)}{x^2}$

3) a. D'aprés le tableau de variation de f' on a :

$\forall x \in]0, +\infty[\; , \; f'(x) \geq 0$

et $f'(x) = 0 \iff x = 1$

Donc : f est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b. D'aprés le tableau de variation de f' on déduire que f'' est négative si f' décroissante et elle est positive si f' croissante.

H. Rachad

Tableau de signe de f'' :

x	0		1		β		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

3) c. Comme f'' s'annule en les deux points d'abscisse respectivement 1 et β et change le signe.

Alors : (C_f) admet $(1, f(1))$ et $(\beta, f(\beta))$ comme deux points d'inflexions.

4) a. Déterminons le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$ d'aprés la figure de (C_g) :

On a (C_g) au dessus de l'axe (Ox) sur $[\alpha, 1]$

et (C_g) au dessous de (Ox) sur $]0, \alpha] \cup [1, +\infty[$

donc : $\begin{cases} \forall x \in [1, \alpha] \; , \; g(x) \geq 0 \\ \forall x \in]0, \alpha] \cup [1, +\infty[\; , \; g(x) \leq 0 \end{cases}$

4)b- On sait que : $g(x) = f(x) - x$

alors : $\forall x \in [1, \alpha]$, $g(x) \geq 0$

$\iff f(x) - x \geq 0$

$\iff f(x) \geq x$

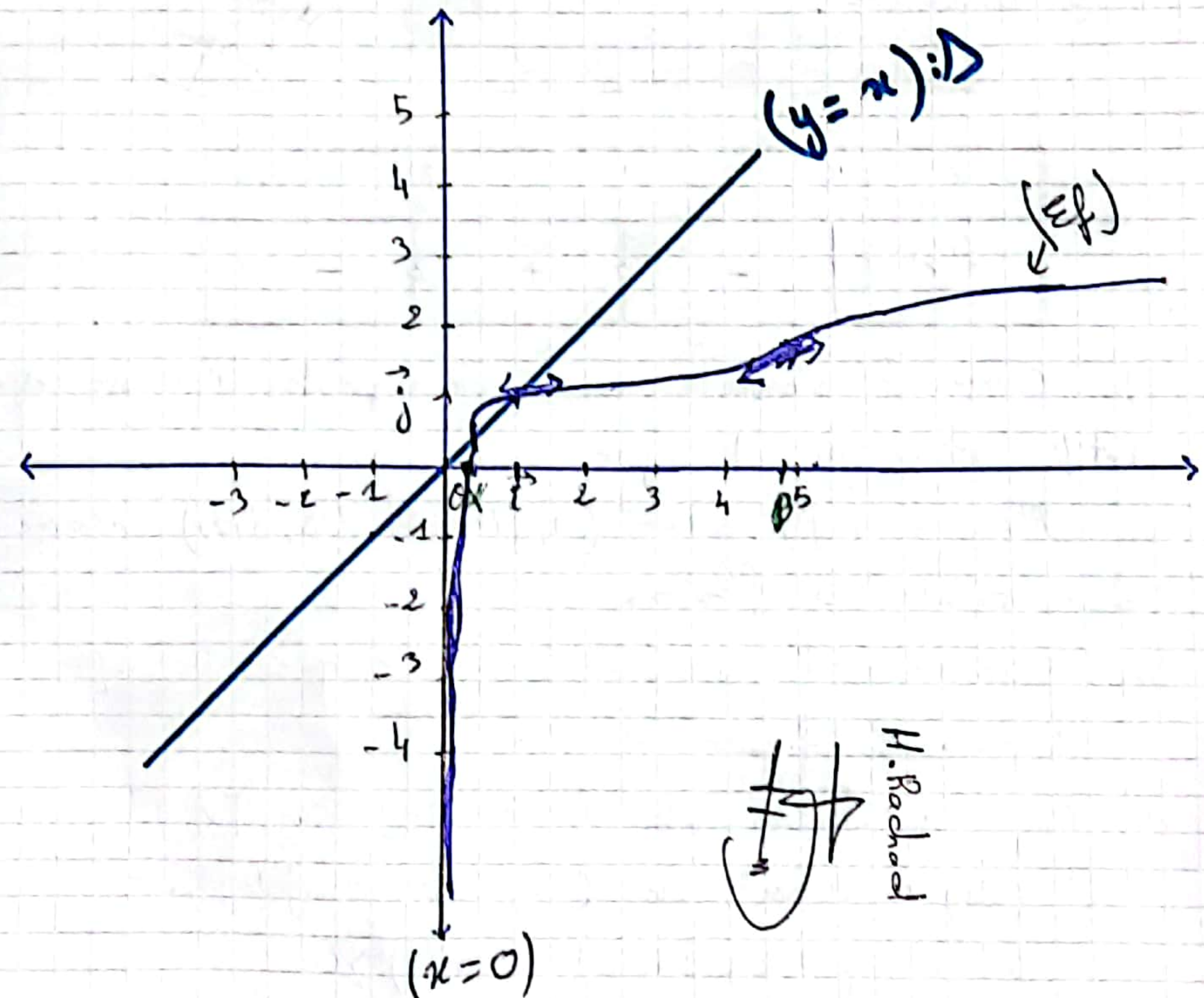
et : $\forall x \in]0, \alpha] \cup [1, +\infty[$, $g(x) \leq 0$

$\iff f(x) - x \leq 0$

$\iff f(x) \leq x$

Donc : (Δ) est en dessous de (Cf) sur $[1, \alpha]$ et au dessus de (Cf) sur $]0, \alpha] \cup [1, +\infty[$

c- La courbe (Cf) :



H. Rachad

6-a- Soit $x \in [\alpha, 1]$:

$$(2x - x\ln(x))' = (2x)' - (x\ln x)'$$
$$= 2 - (x)'\ln x - x(\ln x)'$$
$$= 2 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$$

Alors $\forall x \in [\alpha, 1], (2x - x\ln x)' = 1 - \ln x$

- Donc la fonction $x \to 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \to 1 - \ln x$ sur $[\alpha, 1]$

b- On pose : $\begin{cases} u(x) = (1 - \ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{2}{x}(1 - \ln x) \\ v(x) = x \end{cases}$

Alors par intégration par partie on a :

$$\int_\alpha^1 (1 - \ln(x))^2 dx = [x(1 - \ln x)^2]_\alpha^1 - 2\int_\alpha^1 (1 - \ln(x)) dx$$
$$= [x(1 - \ln x)^2 - 2(2x - x\ln x)]_\alpha^1$$
$$= 5 - \alpha(1 - \ln\alpha)^2 - 2(2\alpha - \alpha\ln\alpha)$$
$$= 5 - \alpha + 2\alpha\ln\alpha - \alpha\ln^2(\alpha) - 4\alpha + 2\alpha\ln(\alpha)$$
$$= 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln(\alpha))\ln(\alpha)$$

H.Rachad

6-c- On a l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et $(O x)$, l'axe $x = \alpha$ et $x = 1$ est :

$$\int_\alpha^1 |f(x)|\, dx\, \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| = \int_\alpha^1 f(x)\, dx\, \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$$
$$= \left(\int_\alpha^1 2 - \frac{2}{x} + \int_\alpha^1 (1 - \ln x)^2 dx\right) cm^2$$
$$= [2x - 2\ln x]_\alpha^1 + 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha \ cm^2$$
$$= 2 - 2\alpha + 2\ln(\alpha) + 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha \ cm^2$$

7.a. Montrons par récurrence que $\alpha \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

pour $n = 0$ on a : $u_0 = \alpha$

$\alpha \leq u_0 = \alpha \leq 1$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $\alpha \leq u_n \leq 1$

et montrons que $\alpha \leq u_{n+1} \leq 1$

comme f strictement croissante

et on a : $\alpha \leq u_n \leq 1$

alors : $f(\alpha) \leq f(u_n) \leq f(1)$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq 1$ (d'après 4.b)

donc d'après la démonstration par récurrence

on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq 1$

7.b. Montrons que la suite (u_n) est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

Comme $u_n \in [\alpha, 1]$ et on a d'après la question (4.b)

$g(x) = f(x) - x \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha, 1]$

Alors : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc : (u_n) est une suite croissante.

7.c. Comme (u_n) croissante et majorée par 1

Alors (u_n) est convergente

soit : $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$

on a : $u_{n+1} = f(u_n)$

alors : $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n)$

donc : $l = f(l)$

l vérifie l'équation $f(x) = x$

d'où $l = 1$ (car (u_n) est croissante.