

Exercice 1 :

1. a) Montrons que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

$$D_{na} : \begin{cases} \vec{AB} (2; 0; -2) \\ \vec{AC} (2; 4; -4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{AB} \wedge \vec{AC} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & \vec{i} \\ 0 & 4 & \vec{j} \\ -2 & -4 & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k} \\ &= 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \end{aligned}$$

b) On a l'aire de ABC est

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \times 4 \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 2 \times 3 = 6$$

$$d((B), (AC)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AC}\|} = \frac{12}{6} = 2$$

2. a) Vérifions que $\vec{Dn} = \frac{1}{4} (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$

On a D est le milieu de [AC]

$$\text{donc } D \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right)$$

$$\text{A part } D(1, 3, 2)$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \vec{Dn} &= (3-1)\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (4-2)\vec{k} \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ &= \frac{1}{4} \vec{AB} \wedge \vec{AC} \end{aligned}$$



b- $d(n, (ABC)) = \|nD\| = 3$

// car (D) est la projection

3. a) On a : (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + (z-4)^2 - 16 + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 3^2$$

donc R le rayon de (S) est $R = 3$ de de centres

3-b. Comme $d(r, ABC) = 3 = R$

donc (ABC) est tangente à la sphère (S) en $H(x_H, y_H, z_H)$ déterminons les coordonnées de H .

On a $D_r = 3 \Rightarrow D \in S$

et $D \in (ABC)$ (car D est le milieu de $[AC]$)

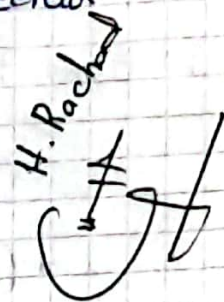
donc $H = \{D\}$

4. On a Q_1 et Q_2 deux plans parallèles à (ABC)

donc Q_1 et Q_2 et (ABC) de même vecteur normale $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc:

$$(Q_1) : 2x + y + 2z + d_1 = 0$$

$$(Q_2) : 2x + y + 2z + d_2 = 0$$



Déterminons d_1 et d_2 :

$$\text{On a : } d(r, Q_1) = d(r, Q_2) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$$

autre part on a :

$$d(r, Q_1) = d(r, Q_2) = \frac{|6 + 4 + 8 + d_i|}{3} = \frac{|6 + 4 + 8 + d_i|}{3} = 2$$

$$\frac{|18 + d_i|}{3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} 18 + d_i = 6 \\ \text{ou} \\ -18 + d_i = 6 \end{cases} \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_i = 6 - 18 \\ \text{ou} \\ d_i = 6 + 18 \end{cases} \Rightarrow d_i \in \{-12, 24\}$$

$$\text{donc } (Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0$$

$$\text{et } (Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0$$

H. Rachad



Exercice 2 :

$$\begin{aligned} 1. a) \quad \text{On a : } a &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. a) \quad \text{On a : } b \cdot d &= 1 + \sqrt{2} + i - 2i \\ &= 1 + \sqrt{2} - i = \bar{b} = c \end{aligned}$$

$$b) \quad \text{On a : } b \cdot d = c$$

$$\begin{aligned} \text{et : } b \cdot a &= 1 + \sqrt{2} + i - \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ &= 1 + i(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } (\sqrt{2} + 1)(1 + i(1 - \sqrt{2})) &= \sqrt{2} + 1 + i(\sqrt{2} - 1^2) \\ &= \sqrt{2} + 1 + i \\ c &= b \cdot d \end{aligned}$$

$$\text{comme } \frac{b \cdot d}{b \cdot a} = \sqrt{2} + 1 \in \mathbb{R}$$

donc les points A, B et D sont alignés

$$\begin{aligned} 3. a) \quad \text{On a : } ac &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (1 + \sqrt{2} - i) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left(\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2(\sqrt{2} + 1 + i) = 2b \end{aligned}$$

$$3. b) \quad \text{On a } ac = 2b$$

$$\text{donc } \arg(ac) = \arg(2b)$$

$$\text{Ainsi : } \arg(a) + \arg(c) = \arg(2) + \arg(b)$$

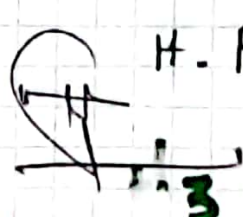
$$\text{d'où : } \arg(a) = \arg(b) + \arg(b)$$

$$\text{// Car } \arg(\bar{b}) = -\arg(b) \text{ //}$$

$$\text{et } \text{Arg}(2) = 0 \text{ [} 2\pi \text{]}$$

$$\text{Ainsi } 2 \arg(b) = \frac{\pi}{4} \text{ [} 2\pi \text{]}$$

H. Rachad



4-a) Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par $R(0, \frac{\pi}{4})$

$$\text{donc, } z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0)$$

$$z' = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z$$

$$\text{Alors : } z' = \frac{1}{2} az \text{ (car } e^{i\frac{\pi}{4}} = a)$$

$$\bullet \text{ On a : } ac = 2b \text{ donc : } \frac{1}{2} ac = b$$

$$\text{d'où : } R(c) = B$$

$$\bullet \text{ On a : } a^2 = 4 e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i \text{ (car } e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2} a^2 = 2i = d$$

$$\text{d'où : } R(d) = D$$

$$\text{c - Montrons que } \frac{b-a}{c-a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a$$

$$\text{On a : } (\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d$$

$$= \frac{1}{2} ac - \frac{1}{2} a^2 \text{ (d'après 4.b)}$$

$$= \frac{1}{2} a(c-a)$$

$$\text{Donc : } \frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)2} a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a$$

$$\text{(car } (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1)$$

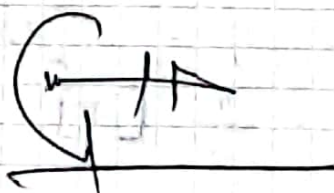
• La mesure de l'angle (\vec{AC}, \vec{AB})

$$\text{On a : } (\vec{AC}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$$

$$= \arg(a) \text{ (car } \arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = 0 [2\pi])$$

$$= \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

H. Rachad



Exercice 3:

1. a) On a $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b. Montrons que : $P(B) = \frac{1}{4}$

$B =$ "On tire un boule cartien ① de Ω_1 et un boule cartien ② de Ω_2 ou inversement"

$$\begin{aligned} \text{Donc : } P(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Calculons $P(A|B)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{1/4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

car : $A \cap B =$ "un boule cartien ① de Ω_1 et un boule cartien ② de Ω_2 "

3. a. On a $P(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

car "X=0" = "le boule tire à la première urne contient 0"
donc $\text{card}(X=0) = 2$

b. La loi de X.

• On a $P(X=1) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$

• $P(X=2) = P(B) = \frac{1}{4}$

• $P(X=4) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

H. Rachad

	$X_i=0$	$X_i=1$	$X_i=2$	$X_i=4$
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

3. c) Montrons que M et N sont équiprobables :

$$\text{On a : } P(M) = P(\{X=2\} \cup \{X=4\})$$

$$= P(X=2) + P(X=4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$(\text{car } \{X=2\} \cap \{X=4\} = \emptyset)$$

$$\text{et : } P(N) = P(X=1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où : } P(N) = P(M) = \frac{1}{3}$$

c-à-d : M et N sont équiprobables

H. Rachad

