Exercice 1 :

1_a) Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

On a : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\ (2;0;-2) \\ \overrightarrow{AC}\ (2;4;-4) \end{cases}$

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \vec{i} \\ 0 & 4 & \vec{j} \\ -2 & -4 & \vec{k} \end{vmatrix}$

$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$

$= 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

b) On a l'aire de ABC est

$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2^2+1^2+2^2} = 2 \times 3 = 6$

. $d((B),(AC)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{12}{6} = 2$

2-a) Vérifions que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

On a D est le milieu de [AC]

donc $D\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2}\right)$

Alors $D(1,3,2)$

donc : $\overrightarrow{D\Omega} = (3-1)\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (4-2)\vec{k}$

$= 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- $d(\Omega,(ABC)) = \|\overrightarrow{\Omega D}\| = 3$

// car (D) est la projection

3.a) On a : $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (\quad)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + (z-4)^2 - 16 + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (\quad)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 3^2$

donc R le rayon de (S) est $R = 3$ de de centre

3.b. Comme $d(\Omega, ABC) = 3 = R$

donc (ABC) est tangente à la sphère (S) en $H(x_H, y_H, z_H)$ déterminons les coordonnés de H.

On a $D\Omega = 3 \Rightarrow D \in S$

et $D \in (ABC)$ (car D est le milieu de $[AC]$)

donc $H = \{D\}$

4. On a Q_1 et Q_2 deux plans parallèles à (ABC)

donc Q_1 et Q_2 et (ABC) de même vecteur normale $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ donc:

$(Q_1) : 2x + y + 2z + d_1 = 0$

$(Q_2) : 2x + y + 2z + d_2 = 0$

H. Rachad

Déterminons d_1 et d_2 :

On a : $d(\Omega, Q_1) = d(\Omega, Q_2) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$

autre part on a :

$d(\Omega, Q_1) = d(\Omega, Q_2) = \frac{16 + 4 + 8 + d_i}{3} = \frac{|6 + 4 + 8 + d_i|}{3} = 2$

$\frac{|18 + d_i|}{3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} 18 + d_i = 6 \\ \text{ou} \\ -18 - d_i = 6 \end{cases}$ $i = 1$ ou 2

$\Rightarrow \begin{cases} d_i = 6 - 18 \\ \text{ou} \\ d_i = -6 - 18 \end{cases} \Rightarrow d_i \in \{-12, -24\}$

donc $(Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0$

et $(Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0$

H. Rachad

Exercice 2 :

1-a) On a : $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2-a) On a , $b - d = 1 + \sqrt{2} + i - 2i$

$= 1 + \sqrt{2} - i = \bar{b} = c$

b) On a : $b - d = c$

et : $b - a = 1 + \sqrt{2} + i - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$= 1 + i(1 + \sqrt{2})$

donc : $(\sqrt{2}+1)(1 + i(1-\sqrt{2})) = \sqrt{2} + 1 + i(\sqrt{2}^2 - 1^2)$

$= \sqrt{2} + 1 + i$

$= c = b - d$

Comme $\frac{b-d}{b-a} = \sqrt{2} + 1 \in \mathbb{R}$

donc les points A, B et D sont alignés

3-a) On a : $ac = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + \sqrt{2} - i)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 2(\sqrt{2} + 1 + i) = 2b$

3. b)

On a $ac = 2b$

donc $\arg(ac) = \arg(2b)$

Alors : $\arg(a) + \arg(c) = \arg(2) + \arg(b)$

d'où : $\arg(a) = \arg(b) + \arg(b)$

// Car $\arg(\bar{b}) = -\arg(b)$ //

et $\text{Arg}(2) = 0\ [2\pi]$

Ainsi $2\arg(b) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

H. Rachad

3

4-a) Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par $R\left(O, \frac{\pi}{4}\right)$

donc, $z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0)$

$$z' = \frac{1}{2} \, 2e^{i\frac{\pi}{4}} z$$

Alors : $z' = \frac{1}{2} az$ (car $2e^{i\pi/4} = a$)

b- • On a : $ac = 2b$ donc : $\frac{1}{2} ac = b$

d'où : $R(C) = B$

• On a : $a^2 = 4e^{i\pi/2} = 4i$ (car $e^{i\pi/2} = i$)

donc : $\frac{1}{2} a^2 = 2i = d$

d'où : $R(A) = D$

c- Montrons que $\frac{b-a}{c-a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a$

On a : $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b - d$

$= \frac{1}{2} ac - \frac{1}{2} a^2$ (d'après 4.b)

$= \frac{1}{2} a(c-a)$

Donc : $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)2} a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a$

(car $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$)

• La mesure de l'angle $(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}})$

On a : $(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$

$= \arg(a)$ (car $\arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = 0 \, [2\pi]$)

$= \frac{\pi}{4} \, [2\pi]$

H. Rachad

Exercicen 3 :

1-a) Ona $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b- Montrons que : $P(B) = \frac{1}{4}$

B = " On tire un boule contien ① de U_1 et un boule contien ② de U_2 ou inversement "

Donc : $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

2- Calculons $P(A_B)$:

Ona : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{1/6}{1/4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Car : $A \cap B$ " un boule contien ① de U_1 et un boule contien ② de U_2 "

3-a. Ona $P(X=0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

car " $X=0$ " = le boule tire à le premier urne contien 0 "

donc $card(X=0) = 2$

b- la loi de X.

- Ona $P(X=1) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(X=2) = P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(X=4) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

H. Rachad

	$X_i=0$	$X_i=1$	$X_i=2$	$X_i=4$
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

3.c) Montrons que M et N sont équiprobables :

On a : $P(M) = P(\{X=2\} \cup \{X=4\})$

$= P(X=2) + P(X=4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

(car $\{X=2\} \cap \{X=4\} = \emptyset$)

et : $P(N) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

d'où : $P(N) = P(M) = \frac{1}{3}$

c.à.d : M et N sont équiprobables

H. Rachad