المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2023

2FC31

NS 22	الموضوع	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية ومسلك العلوم الزراعية	المعامل	7

تعليمات عامة

- ✓ يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة؛
- ✓ يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه؛
- ✓ ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة.

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة، مستقلة فيما بينها، وتتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة الدوال العددية وحساب التكامل والمتتاليات العددية	11 نقطة

- ✓ نرمز بـ $\overline{z}$ لمرافق العدد العقدي z وبـ $|z|$ لمعياره.
- ✓ $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(0,1,4)$ و $B(2,1,2)$ و $C(2,5,0)$ و $\Omega(3,4,4)$

0.25 — 1) أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

0.5 — ب) استنتج مساحة المثلث ABC والمسافة $d(B,(AC))$

2) لتكن D منتصف القطعة $[AC]$

0.25 — أ) تحقق أن $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

0.5 — ب) استنتج أن $d(\Omega,(ABC))=3$

3) لتكن (S) الفلكة ذات المعادلة $x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

0.5 — أ) حدد مركز وشعاع الفلكة (S)

0.5 — ب) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في نقطة ينبغي تحديدها

0.5 — 4) ليكن (Q_1) و (Q_2) المستويين الموازيين لـ (ABC) بحيث يقطع كل واحد منهما (S) وفق دائرة شعاعها $\sqrt{5}$

حدد معادلة ديكارتية لكل من المستويين (Q_1) و (Q_2)

التمرين الثاني (3 نقط):

في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A و B و C و D

التي ألحاقها على التوالي $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $b=1+\sqrt{2}+i$ و $c=\overline{b}$ و $d=2i$

0.25 — 1) أكتب العدد العقدي a على الشكل المثلثي

0.25 — 2) أ) تحقق أن $b-d=c$

0.5 — ب) بين أن $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$ واستنتج أن النقط A و B و D مستقيمية

0.25 — 3) أ) تحقق أن $ac=2b$

0.5 — ب) استنتج أن $2arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) نعتبر الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$، والذي يحول كل نقطة M ذات اللحق z، من المستوى إلى النقطة M' ذات اللحق z'

0.25 — أ) بين أن $z'=\frac{1}{2}az$

0.5 — ب) استنتج أن $R(C)=B$ وأن $R(A)=D$

0.5 — ج) بين أن $\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$ ثم استنتج قياسا للزاوية $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$

التمرين الثالث (3 نقط):

يحتوي صندوق U_1 على ست كرات تحمل الأعداد: 0، 0، 1، 1، 1، 2

ويحتوي صندوق U_2 على خمس كرات تحمل الأعداد : 1، 1، 1، 2، 2 .

نفترض أنه لا يمكن التمييز بين كرات الصندوقين باللمس.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نسحب كرة من الصندوق U_1 ، نسجل العدد a الذي تحمله، ثم نضعها في الصندوق U_2 وبعد ذلك نسحب كرة من الصندوق U_2 ونسجل العدد b الذي تحمله.

نعتبر الحدثين : A " الكرة المسحوبة من U_1 تحمل العدد 1 "

B " الجداء ab يساوي 2 "

0.5 | 1) أ) أحسب $p(A)$ ، احتمال الحدث A

0.5 | ب) بين أن $p(B)=\frac{1}{4}$ (يمكن استعمال شجرة الإمكانيات)

0.75 | 2) أحسب $p(A/B)$ ، احتمال الحدث A علما أن الحدث B محقق.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة للتجربة بالجداء ab

0.25 | أ) بين أن $p(X=0)=\frac{1}{3}$.

0.5 | ب) اعط قانون احتمال X (لاحظ أن القيم التي يأخذها X هي: 0 و 1 و 2 و 4)

0.5 | ج) نعتبر الحدثين: M " الجداء ab زوجي غير منعدم" و N " الجداء ab يساوي 1"

بين أن الحدثين M و N متساويا الاحتمال.

المسألة (11 نقط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

0.25 | 1) أ) تحقق أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

0.5 | ب) بين أن $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ وأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$)

0.5 | ج) استنتج أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

0.75 | د) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا، اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

0.5 | 2) بين أن $f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

3) باستثمار جدول التغيرات أسفله للدالة المشتقة f' للدالة f على المجال $]0,+\infty[$:

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f'(\beta)$	$\searrow$	0

(نعطي $\beta \simeq 4,9$)

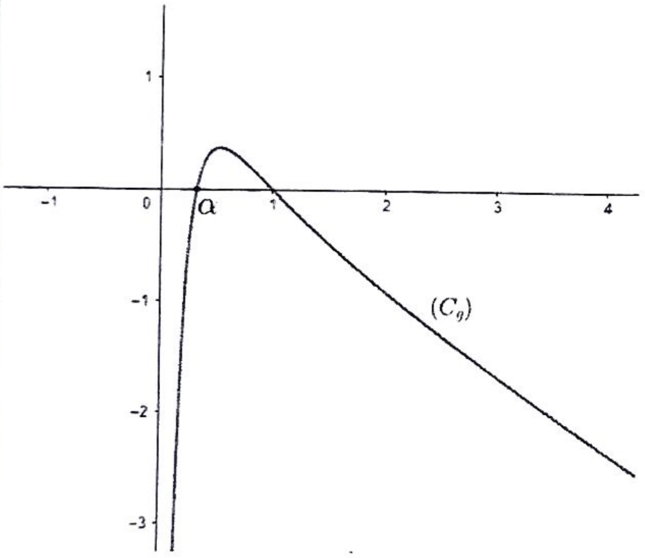
أ) أثبت أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات f . 0.5

ب) أنشئ جدول إشارة الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ 0.5

ج) استنتج تقعر المنحنى (C_f) محددا أفصولي نقطتي انعطافه. 1

4) المنحنى (C_g) جانبه، تمثيل مبياني للدالة $g: x \mapsto f(x) - x$ والتي تنعدم في α و 1 $(\alpha \simeq 0,3)$

ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



أ) انطلاقا من المنحنى (C_g)، حدد إشارة الدالة g على $]0,+\infty[$ 0.5

ب) استنتج أن المستقيم (Δ) يوجد تحت (C_f) على المجال $[\alpha,1]$ وفوق (C_f) على كل من $]0,\alpha]$ و $[1,+\infty[$ 0.5

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\alpha \simeq 0,3$ و $\beta \simeq 4,9$ و $f(\beta) \simeq 1,9$) 1.5

6) أ) تحقق أن الدالة $x \mapsto 2x - x\ln x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto 1 - \ln x$ على $[\alpha,1]$ 0.5

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha$ 1

ج) استنتج بدلالة α مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=1$ 0.75

7) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 \in]\alpha,1[$ والعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) بين بالترجع أن $\alpha < u_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0.5

ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية. (يمكن استعمال السؤال 4) ب) 0.5

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها. 0.75