Académie d'Enseignement de Bamako Rive Droite ***************************	République du Mali Un Peuple-Un But-Une Foi

***************LYCEE PRIVE ASKIA DOUSO************************

*****************LPAD***********************

Mardi, le 28 Juin 2022

Bac Blanc

EPREUVE DE :	CLASSE :	COEFF :	ANNEE SCOLAIRE :	DUREE :
Mathématiques	*TSE*	*05*	*2021-2022*	*4Heures*

Aucun brouillon ne sera corrigé. La clarté et la précision seront prises en compte dans la correction.

Exercice1 :— 5pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. Pour tout complexe z on pose :

$P(z) = z^3 - (7+3i)z^2 + (12+15i)z - 4 - 18i$.

1. a. Calcule $P(2)$ et détermine les nombres a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

   $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$. **(0,75pt)**

   b. En déduis l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. **(0,5pt)**

   c. On considère les points A , B et D images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que :

   $\mathrm{Im}(z_A) \leq \mathrm{Im}(z_B) \leq \mathrm{Im}(z_D)$.

   Place les points A , B et D et détermine la nature du triangle ABD. **(0,75pt)**

2. a. Détermine le barycentre G du système $\{(A\,;9)\,,(B\,;\,-6)\,,\ (C\,;2)\}$ où C est le symétrique de A par rapport à la droite (BD). **(0,5pt)**

   b. Détermine et construis l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

   $9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$. **(0,5pt)**

   d. Détermine et construis l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :

   $\left(9\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 10$. **(0,5pt)**

3. Soit $S^0 = id$ et pour tout entier naturel n, $S^{n+1} = SoS^n$ où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

   a. Détermine l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de S. **(0,75pt)**

   b. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S^4 et S^8. **(0,5pt)**

   c. Justifie que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif. **(0,25pt)**

Exercice2 :— 5pts

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.

S est l'ensemble des couples $(x\,,y)$ tels que $PGCD(x\,,y) = y - x$.

1. a. Calcule le $PGCD(363\,,484)$. **(1pt)**

   b. Le couple $(363\,,484)$ appartient – il à S ? **(0,5pt)**

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,,n+1)$ appartient – il à S ?

   Justifie votre réponse. **(0,5pt)**

3. a. Montre que $(x\,,y)$ appartient à S si et seulement s'il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$. **(1pt)**

b. En déduis que pour tout couple (x, y) de S, on a : $PPCM(x, y) = k(k+1)(y-x)$.**(1pt)**

4. a. Détermine l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228. **(0,5pt)**

   b. En déduis l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $PPCM(x, y) = 228$. **(0,5pt)**

Problème : — 10pts

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal$(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative.

1. a. Détermine la limite de u en $-\infty$. **(0,5pt)**

   b. Montre que, pour tout x réel, on a : $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

   En déduis la limite de u en $+\infty$.**(0,5pt)**

2. a. Montre que $[u(x) + 2x]$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. **(0,25pt)**

   b. Montre que pour tout x réel, on a : $u(x) > 0$. En déduis le signe de $[u(x) + 2x]$. **(0,5pt)**

   c. Interprète graphiquement ces résultats. **(0,25pt)**

3. a. Montre que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. **(0,25pt)**

   b. Etudie les variations de la fonction u. **(0,5pt)**

4. Construis la courbe (C) et son asymptote oblique. **(0,5pt)**

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ et (Γ) sa courbe représentative.

1. Justifie que pour tout x réel, on a : $f(x) = \ln[u(x)]$ en utilisant la question **A.3.a. (0,5pt)**

2. Détermine les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ et étudie les variations de f. **(1pt)**

3. a. Détermine une équation de la droite (T) tangente à la courbe (Γ) en $x_0 = 0$. **(0,25pt)**

   b. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) + x$.

   Montre que φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. En déduis la position de la courbe (Γ) par rapport à la tangente (T). **(0,75pt)**

4. Construis sur le même graphique la courbe (Γ) et la tangente (T). **(0,25pt)**

Partie C :

1. On pose $\alpha = \frac{1-e^2}{2e}$, montre que $u(\alpha) = e$ et en déduis $f(\alpha)$. **(0,5pt)**

2. A l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_\alpha^0 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx$. **(0,75pt)**

3. Soit V une primitive de u et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

   a. Montre que $u\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right) = e^{-t}$. **(0,25pt)**

   b. Justifie que Vog est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est définie par

   $(Vog)'(t) = \frac{1+e^{-2t}}{2}$. **(0,5pt)**

c. En déduis que $V(0) - V(\alpha) = (Vog)(0) - (Vog)(-1) = \int_{-1}^{0} \frac{1+e^{-2t}}{2} dt$ puis que $\int_{\alpha}^{0} u(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$. **(1,25pts)**

4. On admet que pour tout x réel, $f(x) < u(x)$.
Déduis des questions précédentes l'aire, en unité d'aires, du domaine limité par les courbes (C) , (Γ) et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$. **(0,75pt)**