EXAMEN BLANC :	*Baccalauréat blanc n°1*			**BAC 2022**	
SÉRIES :	*TSE-STI*	**SESSION :**	*Mai 2022*		
ÉPREUVE DE :	*MATHÉMATIQUES*	**DURÉE :**	*4 heures*	**COEF :**	*4*

Exercice 1 :.. (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
On pose : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 - z^2 + (-5-4i)z + 21 - 12i$.

1) a) Démontre qu'il existe un réel α tel que : $P(z) = 0$.
   b) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z-\alpha)(z^2 + az + b)$.
   c) Résous $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.
2) On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :
   $z_A = 3 + 2i$; $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.
   a) Place ces points dans le repère.
   b) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe : $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.
   c) Que peut-on en déduire sur la nature du triangle BIA ?
3) Calcule l'affixe du point C image du point I par l'homothétie H, de centre A et de rapport 2.
4) Soit D le point barycentre du système $\{(A, 1);\ (B, -1);\ (C, 1)\}$.
   a) Calcule l'affixe z_D du point D.
   b) Montre que ABCD est un carré.
5) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :
   $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$.
6) Soit l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.
   a) Montre que B appartient à (Γ_2).
   b) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2).

Exercice 2 :.. (4 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1,\ y_0 = 8$

et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

1) Montre par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduis que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
2) Montre par récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels.
   En déduis que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
3) Montre que :
   a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
   b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors ils sont premiers entre eux.
4) Montre par récurrence que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.
   En déduis que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Problème :……………………………………………………………………. (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$, par : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. unité graphique : 4 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par : $g(x)=x+2-e^x$.

1) Etudie le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et détermine la limite de g en $+\infty$.

2) a) Montre que l'équation $g(x)\ =\ 0$ admet une solution et une seule α dans $[0;+\infty[$.

b) Prouve que $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

2) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction *f*

1) a) Montre que, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[, f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) En déduis le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2) a) Montre que pour tout réel positif $x, f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) En déduis la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat trouvé.

3) a) Etablir que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.

b) Donne un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

5) a) Etablis que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[, f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x)=e^x-xe^x-1$.

b) Etudie le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

En déduis le signe de $u(x)$.

c) Déduis des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).

6. Trace $(\mathcal{C})$ et (T).

Partie C : Calcul d'aire et étude d'une suite

1) Détermine une primitive F de f sur $[0;+\infty[$.

2) On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Calcule, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.

Donne une valeur décimale au mm^2 près de l'aire $\mathcal{A}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

a) Calcule v_0, v_1 et v_2.

On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.

b) Interprète graphiquement v_n.

c) Montre que, pour tout $n\geq 2, f(n+1)\leq\int_n^{n+1} f(x)dx\leq f(n)$.

En déduis la monotonie de la suite (v_n) à partie de $n=1$.

d) Détermine la limite de la suite (v_n).