MINISTÈRE de L'ÉDUCATION NATIONALE
****
CENTRE NATIONAL des EXAMENS et CONCOURS de L'ÉDUCATION

RÉPUBLIQUE du MALI
****
UN PEUPLE – UN BUT – UNE FOI

EXAMEN DU BACCALAURÉAT BLANC

SESSION DE : JUILLET 2022		**ÉPREUVE DE :** MATHÉMATIQUES	
SÉRIE : T.S.Exp	**DATE :** 07/07/2022	**DURÉE :** 03 HEURES	**CŒFF :** 03

SUJET

Exercice 1 :..(07,00pts)

I. 1°) On considère l'équation (**E**) d'inconnue complexe Z,

$$(\mathbf{E}) : Z^4 + 5Z^3 + (11 - 3i)Z^2 + (10 - 10i)Z - 8i = 0.$$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\mathbf{u} = -8 + 6i$. (0,25pt)

b) Montrer que l'équation (**E**) admet une racine imaginaire pure Z_0 que l'on déterminera. (0,25pt)

c) Montrer que l'équation (**E**) admet une solution réelle que l'on déterminera. (0,25pt)

d) Achever la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (**E**). (0,75pt)

e) En désignant par Z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par Z_2 la solution réelle et par Z_3 la 4ème solution de (**E**), montrer que Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. (0,5pt)

f) Donner Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique et exponentielle. (1pt)

2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : (3pts)

a) $Z' = Z + 1 - 2i$;

b) $Z' = -3iZ - 2 - i$;

c) $Z' = \sqrt{3}Z - 2 + i$;

d) $\sqrt{2}Z' = (1 - i)Z$.

II. Un lot de vaccin contre le COVID-19 est efficace à 55%, c'est-à-dire sur 100 personnes vaccinées 55 seulement sont sûres d'être protégés contre la maladie. On vaccine 10 personnes avec ce produit.
Quelle est la probabilité pour que :

a) Aucune des personnes ne soit protégées ? (0,5pt)

b) La moitié des personnes est protégée ? (0,25pt)

c) Les dix personnes sont protégées ? (0,25pt)

Exercice 2 :..(04,00pts)

I. 1°) Résoudre dans R l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y'' + \frac{1}{9}y = 0$. (0,5pt)

2°) **a)** Trouver la fonction f solution particulière de $(\mathcal{E})$ vérifiant : $f(0) = -\sqrt{3}$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. (0,5pt)

b) Trouver les réels $\mathbf{r}$ et ω strictement positifs et $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que : $f(x) = \mathbf{r}\cos(\omega x + \theta)$. (0,75pt)

3°) Trouver la solution g de $(\mathcal{E})$ vérifiant : $g(0) = 2$ et $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. (0,25pt)

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = g(x)$. (0,5pt)

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (1,5pts)

$\mathbf{S_1}$) $2e^{1+2\sqrt{x}} - 13e^{\sqrt{x}+1} + 22e = 0$; $\mathbf{S_2}$) $\begin{cases} \ln(x^3 \times y^4) = 6 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$; $\mathbf{S_3}$) $\begin{cases} x \times y = 243 \\ \log_x^y + \log_y^x = \frac{17}{4} \end{cases}$

Problème :..(09,00pts)

Partie A :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1°) **a)** Déterminer les limite de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. (0,5pt)
Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$. (0,25pt)

b) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de φ. (1,25pts)

2°) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1;+\infty[$. (0,5pt)

Vérifier que $1,79 < \alpha < 1,80$. (0,25pt)

3°) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

Partie B :

On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

1°) Déterminer les domaines de définition de f et de g puis calculer leurs limites aux bornes de ces domaines de définition. (1,5pts)

2°) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point $I(0;1)$ une tangente commune (T). Donner une équation cartésienne de (T). (0,5pt)

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersections :

a) de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes de coordonnées ; (0,5pt)

b) de $(\mathcal{C}_g)$ avec les axes de coordonnées ; (0,5pt)

4°) **a)** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\times\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la **Partie A**. (0,25pt)

b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. (0,5pt)

c) En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$. (0,75pt)

5°) **a)** Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (0,25pt)

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,25pt)

c) Déduire une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$. (0,25pt)

d) Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$. (0,5pt)

N.B : *Les tracés de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ ne sont pas demandés.*

BONNE CHANCE !!!

La mathématique est un jeu